Fermionen als Dreipreonenbindungszustände in einheitlichen nichtlinearen Spinorfeldtheorien

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Thomas Lauxmann
aus Tübingen

1986

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543903_0036

Fermionen als Dreipreonenbindungszustände in einheitlichen nichtlinearen Spinorfeldtheorien

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Thomas Lauxmann
aus Tübingen

1986

Tag der mündlichen Prüfung: 04. Juli 1986

Dekan: Prof. Dr. Hanns Ruder

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Stumpf

2. Berichterstatter: Prof. Dr. P. Kramer

Abstract

Lauxmann, Thomas:

Fermionen als Dreipreonenbindungszustände in einheitlichen nichtlinearen Spinorfeldtheorien

Einheitliche nichtlineare Spinorfeldmodelle sind Quantenfeldtheorien, in denen alle beobachtbaren (elementaren und nichtelementaren) Teilchen als Bindungszustände fundamentaler Fermionenfelder betrachtet werden. Diese sogenannten Preonenfelder sind selbst unbeobachtbar. Grundlage unserer Untersuchung ist eine dynamische Fundamentalgleichung für ein achtkomponentiges Spinor-Isospinor-Feld mit Ableitungen zweiter Ordnung und mit lokaler Vierfermiwechselwirkung. Die korrespondierende Quantenfeldtheorie erhält man durch kanonische Quantisierung eines zu der Fundamentalgleichung äquivalenten Systems von Hilfsfeld-Gleichungen erster Ordnung. Sie ist renormierbar und erlaubt Energieeigenwertberechnungen; sie enthält aber neue Hilfsfeldfreiheitsgrade und Zustände mit negativer Norm.

Im Rahmen der funktionalen Quantenfeldtheorie wird eine (Rechts-) Eigenwertgleichung für den Dreipreonenbindungszustand deduziert. Ausdrücke für die zugehörige Norm gewinnt man ohne explizite Kenntnis des metrischen Fundamentaltensors durch die Formulierung einer zweiten (Links-) Eigenwertgleichung.

Die Rechts- und Links-Gleichungen sind nur einer physikalischen Interpretation zugänglich, wenn die Hilfsfeldfreiheitsgrade auf der Ebene der Bindungszustände wieder eliminiert werden können. Wir zerlegen dazu die Hilfsfeldanteile der Gleichungen nach irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe S(3). Analog zu dem schon früher diskutierten Zweipreonenfall befindet sich auch im Dreiteilchenfall die physikalische Information in dem symmetrischen Sektor. Während dieser Sektor im Zweiteilchenfall entkoppelt, ist das im Dreiteilchenfall nur näherungsweise möglich. In der Niederenergienäherung zeigen wir beispielhaft, daß alle Bedingungen für physikalische Resultate prinzipiell erfüllbar sind.

INHALTSVERZEICHNIS

	Einleitung	1
1.	Grundannahmen der Theorie	6
1.1	Das Modell und seine Quantisierung	6
1.2	Der Zustandsraum	12
2.	Funktionalraum	19
2.1	Grundlagen	19
2.2	Funktionalgleichungen	22
2.3	Bindungszustände und Metrik	25
3.	Der Dreiteilchensektor	31
3.1	Relativfunktionale	32
3.2	Gleichungssystem für $\varphi(I_1 I_2 I_3 \mid a)$	37
4.	Auswertung der Hilfsfelder	40
4.1	Darstellungen der S(3)	42
4.2	Der Zweiteilchensektor	51
4.3	Näherungsweise Entkopplung bei drei Teilchen	57
4.4	Gleichung für $\varphi^{(111)}$	71
4.5	Linkslösungen	74
5.	Näherungen	81
5.1	Invertierung von $\mathcal{M}$	81
5.2	Darstellung der Wechselwirkungsterme	86
5.3	Niederenergielimes: Diagonalisierung von $W^{\pm}$	92
5.4	Niederenergielimes: Selbstkonsistenz	100
	Zusammenfassung	103
	Anhang A: Der freie Propagator	105
	Anhang B: Bezeichnungen; Diracspinoren	111
	Literaturverzeichnis	121

Einleitung

In der Physik gibt es zahlreiche Objekte unterschiedlichster Eigenschaften und Reaktionsformen. Diese Vielfalt von Objekten und Prozessen zu ordnen und durch wenige einfache Bestandteile zu erklären, ist Ziel der theoretischen Physik. So ließen sich zum Beispiel die über hundert chemischen Elemente in ein Periodensystem einordnen. Mit Hilfe der Quantenmechanik wurde es möglich, die große Anzahl von chemischen Elementen und ihre Reaktionen durch die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Elektronen und Protonen des Atomkerns zu beschreiben.

Während zur Zeit der Einführung der Quantenmechanik chemische Elemente allein durch Photonen, Elektronen, Protonen (und Neutronen) aufgebaut wurden, erhöhte sich später die Zahl der Elementarteilchen aufgrund neuer Experimente immer mehr, so daß gegenwärtig über hundert Elementarteilchen bekannt sind.

Um die neue Vielfalt der "Elementarteilchen" zu erfassen, wurden unter anderem 1964 drei Quarks postuliert: das up-Quark, das down-Quark und das strange-Quark. Protonen und Neutronen sind demgemäß zusammengesetzt; sie bestehen aus je drei Quarkkonstituenten. Das Standardmodell, das die Wechselwirkung der neuen elementaren Fermionen Quarks und Leptonen durch die elektroschwachen Bosonen und Gluonen beschreibt, wurde in den letzten Jahren entwickelt und führte in der Elementarteilchen- und Kernphysik zu großen Erfolgen. Das Standardmodell erfuhr durch die Grand Unification Theorien noch eine Erweiterung.

Der Preis, den man für diese Erfolge zu zahlen hatte, war ein sprunghaftes Ansteigen der Zahl der ursprünglich drei elementaren Teilchen auf über dreißig im Standardmodell. In den Grand Unification Theorien vergrößerte sich deren Anzahl nochmals. Es stellt sich daher zwangsläufig die Frage: Sind alle die Teilchen, die in das Standardmodell eingehen, wiederum zusammengesetzt? Verschiedene Subquark- oder Preonenmodelle wurden in den letzten Jahren zunehmend diskutiert. Einen Überblick mit Literaturhinweisen findet man in [1].

An dieser kurzen Einführung läßt sich die Wandlung ablesen, die der Begriff Elementarteilchen durchgemacht hat. Offenbar befindet man sich in der Situation, daß jedes Elementarteilchen sowohl elementar als auch zusammengesetzt sein kann. Eine untere Grenze dieser Schachtelungskette

setzt die Feldmassenhypothese. Sie geht auf Thomson [21] zurück und wurde 1902 von Kaufmann und Abraham [22] für das elektromagnetische Feld durch die Formel "Die Masse des Elektrons ist proportional seiner elektromagnetischen Feldenergie" beschrieben. Später wurde von Einstein aus Symmetriegründen $E = mc^2$ aus der relativistischen Mechanik abgeleitet. Heisenberg [2] knüpfte an die Feldmassenhypothese an, indem er die verschiedenen Elementarteilchen als stationäre Zustände einer fundamentalen Substanz "Energie" oder "Materie" auffaßte.

Die fundamentale Substanz ("Energie" oder "Materie") wurde in der mathematischen Theorie durch einen Spinorfeldoperator charakterisiert, dessen dynamische Eigenschaften Heisenberg [2] durch eine lokale selbstkoppelnde Gleichung mit Ableitungen erster Ordnung ausdrückte. Jedoch führen solche einheitlichen nichtlinearen Spinorfeldgleichungen nach kanonischer Quantisierung zu einer Quantenfeldtheorie, die nicht renormierbar ist. Es ergeben sich daher keine endlichen Resultate für Observable. Will man aufgrund der mathematischen Einfachheit an nichtlinearen Spinorfeldtheorien mit Ableitungen erster Ordnung festhalten, so benötigt man zusätzliche Annahmen, die eine Renormierbarkeit gewährleisten. Heisenberg [2] wählte dafür Dipolgeister und damit verbunden indefinite Metrik. Mit ihrer Hilfe war man in der Lage, Singularitäten von Quantenfeldern, die in Zustandsräumen mit positiv definiter Metrik nichtrenormierbar sind, zu beseitigen. Jedoch ließ sich die Auswirkung von Dipolgeistern sowohl auf die Bindungszustände als auch auf die Metrik nicht exakt angeben. Darüber hinaus zerstörten Dipolgeister die kanonische Quantisierung und führten zu komplizierten Rechnungen, so daß ein Fortschritt in dieser Richtung nicht erzielt wurde und auch nicht zu erwarten ist.

Einen Ausweg stellen nichtlineare Spinorfeldgleichungen mit Ableitungen höherer Ordnung dar. Zum einen enthalten sie selbstregularisierende Eigenschaften und sind daher renormierbar; zum anderen können sie kanonisch quantisiert werden. Allerdings ziehen diese Gleichungen ebenfalls indefinite Metrik nach sich. Im Gegensatz zu Theorien mit Dipolgeistern sind bei kanonischen Theorien mit indefiniter Metrik Fortschritte gemacht worden.

Feldgleichungen mit Ableitungen höherer Ordnung wurden zuerst von Bopp [3] formuliert, um eine selbstregularisierende klassische Elektrodynamik im Sinne der Feldmassenhypothese zu konstruieren. Später diskutierten Wildermuth [4] und Pais und Uhlenbeck [5] Spinorfeldgleichungen mit Ab-

leitungen höherer Ordnung. Weitere Literaturhinweise dazu finden sich in [6, 7]. Unserem Modell einer nichtlinearen Spinorfeldgleichung mit Ableitungen zweiter Ordnung liegen die Veröffentlichungen [8, 9, 10] zu Grunde.

Das Spinorfeldmodell mit Ableitungen zweiter Ordnung ist nicht unabhängig von dem Modell mit Ableitungen erster Ordnung. Stumpf [11] konnte für skalare Wechselwirkungen zeigen, daß die Gleichung mit Ableitungen zweiter Ordnung eine großkanonische Version der Gleichung mit Ableitungen erster Ordnung darstellt. Über die Teilchenzahl treten zwei weitere Massenparameter als chemische Potentiale auf, die sehr groß gewählt werden können und die bewirken, daß die Preonenfelder nicht frei vorkommen. Dieses Confinement verschärft die Heisenbergsche Auffassung noch und zeichnet die Preonenfelder eindeutig als unterste Stufe der Elementarteilchenhierarchie aus. Damit kommen wir zur Beantwortung der anfangs aufgeworfenen Frage.

In dem hier vorliegenden Modell sind alle Fermionen und Bosonen des Standardmodells Bindungszustände der Preonenfelder, die selbst nicht frei vorkommen. Das Preonenfeld beschreiben wir durch ein lokales Spinorfeld, das einen Isospin trägt. Isospinfreiheitsgrade in nichtlinearen Spinorfeldtheorien wurden von Heisenberg [2, 23] und von Dürr [24] diskutiert.

Um aus dem nichtlinearen Spinorfeldmodell mit Ableitungen zweiter Ordnung observable Größen abzuleiten, wurden von Stumpf [16] neue Rechentechniken entwickelt. Diese sind vollständig verträglich mit der kanonischen Quantisierung, welche wir auch unserem Modell zugrunde legen und welche den Anschluß an die Interpretation der Quantenmechanik erlaubt. Im Gegensatz zur konventionellen Quantenfeldtheorie wird in den neuen Rechenverfahren der funktionalen Quantenfeldtheorie dem Zustandsbegriff wegen der indefiniten Metrik eine viel größere Bedeutung zugemessen. Im Rahmen dieses Zugangs sind zwei Probleme zu lösen.

Zuerst muß man Energieeigenwertgleichungen für n-Preonenbindungszustände deduzieren. Mit Hilfe eines Theorems konnte gezeigt werden [12, 13], daß eine nichtlineare Spinorfeldgleichung mit Ableitung höherer Ordnung äquivalent ist zu einem System von nichtlinearen Spinorfeldgleichungen erster Ordnung. Aus Gleichungen mit (Zeit-) Ableitungen erster Ordnung gelangt man dann problemlos zu Energieeigenwertgleichungen. Die Zeit kommt darin nur noch als Parameter vor. Deshalb kann zu der "einzeitigen" Theorie

übergegangen werden. Dazu übertragen wir die Limesprozedur, die von Maison und Stumpf [17] für symmetrische Funktionen entwickelt wurde, auf unser Modell. Zur Ableitung der Energieeigenwertgleichung mußten wir jedoch Hilfsfelder in die Theorie einführen, die physikalisch nicht interpretierbar sind.

Das zweite Problem betrifft die indefinite Metrik; die Quantenfeldtheorie unseres Modells enthält Zustände mit negativer Norm. Neben der Berechnung von Eigenwerten der Bindungszustände muß geprüft werden, ob die zugehörigen Eigenvektoren positive Norm besitzen und damit einer statistischen Interpretation zugänglich sind. Nun ist es aber eine allgemeine Eigenschaft von nichtlinearen quantisierten Feldern, daß der Zustandsraum und dessen Metrik nicht vorgegeben sind, sondern erst durch die Dynamik bestimmt werden. Das bedeutet, daß der metrische Fundamentaltensor der Theorie erst dann explizit vorliegt, wenn die Theorie gelöst ist. Nach Stumpf [18] kann aber die Norm von Bindungszuständen auch ohne Kenntnis des metrischen Fundamentaltensors bestimmt werden. Dazu benötigt man neben der (Rechts-) Gleichung für einen n-Teilchenbindungszustand noch eine zweite (Links-) Gleichung für den dualen Zustand. Im Zweiteilchensystem wurde demonstriert [9, 19], daß das Modell eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation gestattet.

Beide Fragen stehen im Mittelpunkt von Untersuchungen, die auf [10] basieren und die in den Dissertationen von Hailer [19], Hornung [20] und in der hier vorliegenden Arbeit vertieft werden.

Gegenstand dieser Arbeit ist der Dreiteilchensektor. Ein Eigenwertgleichungssystem für den Dreiteilchenbindungszustand wird aus den Grundpostulaten des Modells (Kapitel 1) mit Hilfe der funktionalen Quantenfeldtheorie (Kapitel 2) in Kapitel 3 gewonnen. Durch die Einführung der Hilfsfeldfreiheitsgrade ist zunächst nicht klar, ob dieses Eigenwertgleichungssystem physikalisch interpretiert werden kann. Im Zweiteilchenfall wurde durch Obergang zum Schwerpunktsystem aus dem Eigenwertgleichungssystem eine äquivalente physikalisch interpretierbare Gleichung abgeleitet. Für uns stellen sich daher die Fragen:

1) Lassen sich auch im Dreiteilchenfall die Hilfsfelder wieder eliminieren, so daß eine physikalisch interpretierbare Energiegleichung resultiert?
2) Ist die Norm von physikalischen Bindungszuständen positiv definit?

In Kapitel 4 zerlegen wir das Eigenwertgleichungssystem bezüglich der

Hilfsfelder nach irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe S(3). In Kapitel 5 verschaffen wir uns durch die Entwicklung nach Diracspinoren einen strukturellen Überblick, der die Beantwortung der vorangehenden Fragen ermöglicht.

Kapitel 1: Grundannahmen der Theorie

1. Das Modell und seine Quantisierung

Hier stellen wir Voraussetzungen zusammen, die unserem Modell zugrundeliegen. Ausführlichere Darstellungen sind in [8, 10] zu finden.

Die fundamentalen Preonenfelder des Modells sind zwei vierkomponentige Spinorfelder $R_{A\alpha}(x)$ mit Spinorindex $\alpha=1,2,3,4$. Der Isospinindex $A=1,2$ unterscheidet die beiden Preonensorten. Im Rahmen dieser Arbeit untersuchen wir die Auswirkung der Selbstwechselwirkung einer Preonensorte auf deren Bindungszustände. Die Frage der Wechselwirkung zwischen den beiden Preonenfeldern $R_{1\alpha}(x)$ und $R_{2\alpha}(x)$ klammern wir aus. Im weiteren betrachten wir deshalb nur eine Preonensorte und bezeichnen diese mit $R_\alpha(x)$.

Die dynamischen Grundgleichungen sind über die Lagrangedichte gegeben:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{kin}(x) + \mathcal{L}_I(x) \tag{1.1}$$

Wir wollen eine lokale Vierfermi-Wechselwirkungstheorie zugrundelegen. Im Rahmen von früheren Arbeiten [8, 10] haben wir die allgemeinste Form einer Wechselwirkungs-Lagrangedichte bestimmt; sie ist hermitesch, Poincaré- sowie P- und C-invariant, und sie erhält die Ladung. Von dieser Lagrangedichte betrachten wir hier nur den skalaren Anteil:

$$\mathcal{L}_I(x) = f\left(\bar{R}_\alpha(x)\, R_\alpha(x)\right)\cdot\left(\bar{R}_\beta(x)\, R_\beta(x)\right) \tag{1.2}$$

Hierbei ist die Kopplungskonstante f reell.

Würden wir für $\mathcal{L}_{kin}(x)$ eine Diracgleichung mit Ableitungen 1. Ordnung nehmen, so wäre diese Theorie nach der kanonischen Quantisierung nicht renormierbar [2]. Eine Möglichkeit, die Renormierbarkeit von nichtlinearen Spinorfeldmodellen sicherzustellen, besteht in der Einführung von Ableitungen höherer Ordnung im kinetischen Term. Solche Gleichungen besitzen selbstregularisierende Eigenschaften und sind daher renormierbar. Theorien mit Ableitungen höherer Ordnung wurden von Bopp [3] eingeführt und unter anderen von Podolski [25], Pais und Uhlenbeck [5], Wildermuth [4] und Stumpf [12] weiter untersucht. Ableitungen höherer Ordnung führen jedoch nach der kanonischen Quantisierung zu einer indefiniten Metrik im zugehörigen Zustandsraum. Dieses Problem wird uns auch im weiteren beschäftigen.

Für den kinetischen Term nehmen wir eine Ableitung 2. Ordnung an:

$$\mathcal{L}_{kin}(x) = \bar{R}_{\alpha_1}(x)\left(-i\not{\partial}+m_1\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(-i\not{\partial}+m_2\right)_{\alpha_2\alpha_3} R_{\alpha_3}(x) \tag{1.3}$$

Dabei sind m_i, i=1,2, reelle Massen.

Auch $\mathcal{L}_{kin}(x)$ in (1.3) ist hermitesch, Poincarê- sowie P- und C-invariant, und sie erhält die Ladung [8,10]. Da wir die Felder kanonisch quantisieren wollen, gehen wir zu einem äquivalenten System von Gleichungen mit Ableitungen 1. Ordnung über. Eine solche Zerlegung wurde von Pais und Uhlenbeck [5] versucht. Bei zugrundegelegter elektromagnetischer Wechselwirkung waren die Gleichungen höherer Ordnung und das Gleichungssystem 1. Ordnung nicht äquivalent. Stumpf [12] und Grosser [13] konnten jedoch zeigen, daß eine Spinorfeldgleichung höherer Ordnung mit lokaler Vierfermi-Wechselwirkung äquivalent ist zu einem System von Gleichungen 1. Ordnung.

Um diesen Zusammenhang herzustellen, definieren wir neue "Hilfsfelder" durch

$$R_{i\,\alpha}(x) := \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{2}\left(-i\not{\partial}+m_k\right)_{\alpha\beta} R_\beta(x) \tag{1.4}$$

und

$$\xi_i := \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{2}\left(-m_i+m_k\right)^{-1} \tag{1.5}$$

Damit ergeben sich die ursprünglichen Preonfelder zu

$$R_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{2} \xi_i R_{i\,\alpha}(x) \tag{1.6}$$

oder mit der Definition

$$S_{i\,\alpha}(x) := \xi_i R_{i\,\alpha}(x) \tag{1.7}$$

zu

$$R_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{2} S_{i\,\alpha}(x) \tag{1.8}$$

Drücken wir $\mathcal{L}_{kin}(x)$ von (1.3) mit (1.4) - (1.8) durch die Felder $S_{i\,\alpha}(x)$ aus, so erhalten wir

$$\mathcal{L}_{kin}(x) = \sum_{i_1=1}^{2} \xi_{i_1}^{-1} \bar{S}_{\alpha_1}^{i_1}(x) \left(-i\partial\!\!\!/ + m_{i_1}\right)_{\alpha_1\alpha_2} S_{\alpha_2}^{i_1}(x) \tag{1.9}$$

also ein System von Ableitungen 1. Ordnung.

Die Wechselwirkungslagrangedichte $\mathcal{L}_I(x)$ drücken wir ebenfalls durch die Felder $S_\alpha^i(x)$ aus. (1.2) führt auf

$$\mathcal{L}_I(x) = f \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4 = 1}^{2} \gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} \gamma^0_{\alpha_3\alpha_4} S^+_{\alpha_1 i_1}(x) S_{\alpha_2}^{i_2}(x) S^+_{\alpha_3 i_3}(x) S_{\alpha_4}^{i_4}(x) \tag{1.10}$$

Die Feldgleichungen für die Felder $S_\alpha^i(x)$ und $S_\alpha^{+i}(x)$ lauten dann

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S^+_{k\beta}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu S^+_{k\beta})} = 0$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_{k\beta}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu S_{k\beta})} = 0$$

woraus

(1.11)

$$\xi_k^{-1}\left(-i\partial\!\!\!/ + m_k\right)_{\beta\alpha} S_{k\alpha}(x) + 2f \sum_{i_1 i_2 i_3} \delta_{\beta\alpha_1} \gamma^0_{\alpha_2\alpha_3} S_{\alpha_1}^{i_1}(x) S^+_{\alpha_2 i_2}(x) S_{\alpha_3}^{i_3}(x) = 0$$

(1.12)

$$\xi_k^{-1}\left(+i\partial\!\!\!/^T + m_k\right)_{\beta\alpha'} \gamma^0_{\alpha'\alpha} S^+_{k\alpha}(x) + 2f \sum_{i_1 i_2 i_3} \gamma^0_{\beta\alpha_1} \gamma^0_{\alpha_2\alpha_3} S^+_{\alpha_1 i_1}(x) S^+_{\alpha_2 i_2}(x) S_{\alpha_3}^{i_3}(x) = 0$$

folgt.

Für die folgenden Untersuchungen ist es vorteilhaft [34], die adjungierten Spinoren durch die ladungskonjugierten zu ersetzen, welche definiert sind durch

$$S^c_{k\alpha}(x) := C_{\alpha\beta} \bar{S}_\beta(x) \tag{1.13}$$

Die Matrix C wird definiert durch die Relation

$$-\gamma^{\mu T} = C^{-1} \gamma^\mu C \tag{1.14}$$

und hat folgende Eigenschaften:

$$C C^+ = C^+ C = 1 \quad ; \quad C^T = -C \tag{1.15}$$

In (1.11) und (1.12) ersetzen wir $\bar{S}$ durch S^c. Wegen

$$\bar{S}_\alpha(x) = C^{-1}_{\alpha\beta}\, S^c_\beta \tag{1.16}$$

folgt:

(1.17)

$$\xi_h^{-1}(-i\not\partial + m_h)_{\beta\alpha} S_{h\alpha}(x) + 2f \sum_{i_1 i_2 i_3} \delta_{\beta\alpha_1} C^{-1}_{\alpha_2\alpha_3} S_{i_1\alpha_1}(x) S^c_{i_2\alpha_2}(x) S_{i_3\alpha_3}(x) = 0$$

(1.18)

$$\xi_h^{-1}(-i\not\partial + m_h)_{\beta\alpha} S^c_{h\alpha}(x) + 2f \sum_{i_1 i_2 i_3} \delta_{\beta\alpha_1} C^{-1}_{\alpha_2\alpha_3} S^c_{i_1\alpha_1}(x) S^c_{i_2\alpha_2}(x) S_{i_3\alpha_3}(x) = 0$$

Um eine Quantenfeldtheorie zu erhalten, wollen wir nun die Vertauschungsrelationen festlegen. Dazu definieren wir den kanonischen Impuls

$$\pi_{i\alpha}(x) := \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 S_{i\alpha}(x))} = i\,\xi_i^{-1}\, S^+_{i\alpha}(x) \tag{1.19}$$

Für die Vertauschungsrelationen (V.R.) fordern wir

$$\{\pi_{i\alpha}(t,\vec{x}),\, S_{h\beta}(t,\vec{y})\} = -i\,\delta_{ih}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{1.20}$$

d.h. für die Felder

$$\{S^+_{i\alpha}(t,\vec{x}),\, S_{h\beta}(t,\vec{y})\} = -\xi_h\,\delta_{ih}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\{S^+_{i\alpha}(t,\vec{x}),\, S^+_{h\beta}(t,\vec{y})\} = \{S_{i\alpha}(t,\vec{x}),\, S_{h\beta}(t,\vec{y})\} = 0 \tag{1.21}$$

Für die V.R. der ursprünglichen Felder $R_\alpha(x)$ ergibt sich daraus

$$\{R^+_\alpha(t,\vec{x}),\, R_\beta(t,\vec{y})\} = 0$$

$$\{R^+_\alpha(t,\vec{x}),\, R^+_\beta(t,\vec{y})\} = \{R_\alpha(t,\vec{x}),\, R_\beta(t,\vec{y})\} = 0 \tag{1.22}$$

Damit bekommt die Reihenfolge der Felder in $\mathcal{L}_I(x)$ von Gleichung (1.10) eine definierte Bedeutung. Erst mit dieser Antisymmetrie der Wechselwirkung ist es möglich, eine wohldefinierte Funktionaltheorie zu entwickeln.

Um die weiteren Rechnungen übersichtlich zu halten, führen wir einige Abkürzungen ein. Wir definieren:

$$\psi^{\,i}_{\Gamma\,\alpha}(x) := \begin{cases} S^{\,i}_{\alpha}(x) & \Gamma = 1 \\ S^{\,c}_{\alpha\,i}(x) & \Gamma = 2 \end{cases} \tag{1.23}$$

Die Feldgleichungen (1.17) und (1.18) lassen sich damit in eine Gleichung zusammenfassen:

$$\left(\mathcal{G}^{\mu}_{\substack{i_1 i_2 \\ \Gamma_1 \Gamma_2 \\ \alpha_1 \alpha_2}} (-i\partial_\mu) + \mathbb{1}_{\substack{i_1 i_2 \\ \Gamma_1 \Gamma_2 \\ \alpha_1 \alpha_2}} m_{i_1} \right) \psi_{\substack{i_2 \\ \Gamma_2 \\ \alpha_2}}(x) \tag{1.24}$$

$$+ V_{\substack{i_1 i_2 i_3 i_4 \\ \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}} \psi_{\substack{i_2 \\ \Gamma_2 \\ \alpha_2}}(x)\, \psi_{\substack{i_3 \\ \Gamma_3 \\ \alpha_3}}(x)\, \psi_{\substack{i_4 \\ \Gamma_4 \\ \alpha_4}}(x) = 0$$

Dabei ist

$$\mathcal{G}^{\mu}_{\substack{i_1 i_2 \\ \Gamma_1 \Gamma_2 \\ \alpha_1 \alpha_2}} := \gamma^{\mu}_{\alpha_1 \alpha_2}\, \delta_{\Gamma_1 \Gamma_2}\, \delta_{i_1 i_2} \tag{1.25}$$

$$V_{\substack{i_1 i_2 i_3 i_4 \\ \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}} := 2f\, \xi_{i_1}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2}\, C^{-1}_{\alpha_3 \alpha_2} \cdot \begin{cases} \delta_{\Gamma_1 1}\, \delta_{\Gamma_3 2}\, \delta_{\Gamma_4 1} & \Gamma_1 = 1 \\ \delta_{\Gamma_1 2}\, \delta_{\Gamma_3 2}\, \delta_{\Gamma_4 1} & \Gamma_1 = 2 \end{cases} \tag{1.26}$$

In Gleichung (1.24) wird die Einsteinsche Summationskonvention benutzt, d.h. über alle gleichen Indizes wird summiert. Im Vertex (1.26) sind die Indizes $i_2 i_3 i_4$ nur formal vorhanden; im Zusammenhang mit der Summationskonvention ist das so zu verstehen, daß über die Felder einzeln summiert werden soll.

Ebenso wie die Feldgleichung lassen sich auch die Vertauschungsrelationen formulieren. Aus (1.21) folgt

$$\left\{ \psi_{\substack{i_1 \\ \Gamma_1 \\ \alpha_1}}(t,\vec{x}_1) \, , \, \psi_{\substack{i_2 \\ \Gamma_2 \\ \alpha_2}}(t,\vec{x}_2) \right\} = A_{\substack{i_1 i_2 \\ \Gamma_1 \Gamma_2 \\ \alpha_1 \alpha_2}}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \tag{1.27}$$

wobei

$$A_{\substack{i_1 i_2 \\ \Gamma_1 \Gamma_2 \\ \alpha_1 \alpha_2}} := -\xi_{i_1} \delta_{i_1 i_2} (C\cdot\gamma^0)_{\alpha_1\alpha_2} \sigma^{\Gamma_1\Gamma_2} \delta(\vec{x}_1-\vec{x}_2) \tag{1.28}$$

Sowohl in den Feldgleichungen (1.24) wie auch in den Vertauschungsrelationen (1.27) ergeben sich recht unhandliche Indexsysteme, die wir in den weiteren Rechnungen oft in einem Superindex zusammenfassen. Die folgenden beiden Abkürzungen werden benutzt:

$$z := i\Gamma\alpha \tag{1.29}$$

und

$$I := z, x \tag{1.30}$$

Die Summationskonvention bedeutet für das System (1.30), daß über den Indexsatz Z zu summieren ist, während über die vier Raumzeitvariablen x zu integrieren ist.

Feldgleichung und Vertauschungsrelation lauten mit (1.29)

$$\left(\gamma^\mu_{z_1 z_2} (-i\partial_\mu) + \mathbb{1}_{z_1 z_2} m_{z_2} \right) \psi_{z_2}(x) + V_{z_1 z_2 z_3 z_4} \psi_{z_2}(x) \psi_{z_3}(x) \psi_{z_4}(x) = 0 \tag{1.31}$$

$$\left\{ \psi_{z_1}(x_1) \, , \, \psi_{z_2}(x_2) \right\}_{t_1=t_2} = A_{z_1 z_2}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \tag{1.32}$$

Um diese beiden Gleichungen mit (1.24) zu formulieren, definieren wir

$$\mathbb{D}_{I_1 I_2} := \mathbb{D}_{z_1 z_2}(x_1, x_2)$$

$$= \left(\gamma^{\mu}_{z_1 z_2}(-i\partial_\mu) + \mathbb{1}_{z_1 z_2} m_{z_2} \right) \delta(x_1 - x_2) \tag{1.33}$$

$$\mathbb{V}_{I_1 I_2 I_3 I_4} := V_{z_1 z_2 z_3 z_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= V_{z_1 z_2 z_3 z_4}\, \delta(x_1 - x_2)\, \delta(x_1 - x_3)\, \delta(x_1 - x_4) \tag{1.34}$$

$$\Psi_I := \Psi_z(x) \tag{1.35}$$

Damit wird aus (1.25) und (1.26)

$$\mathbb{D}_{I_1 I_2} \Psi_{I_2} + \mathbb{V}_{I_1 I_2 I_3 I_4} \Psi_{I_2} \Psi_{I_3} \Psi_{I_4} = 0 \tag{1.36}$$

$$\left\{ \Psi_{I_1}, \Psi_{I_2} \right\}_{t_1 = t_2} = A_{I_1 I_2} \tag{1.37}$$

2. Der Zustandsraum

In der nichtrelativistischen Quantenmechanik mit kanonischer Quantisierung ist der Zustandsraum ein Hilbertraum, der eine unitäre Darstellung derjenigen Gruppe von Transformationen trägt, unter welcher die dynamische Gleichung invariant ist. Diesen Zusammenhang nehmen wir auch für das nichtlineare Spinorfeldmodell der Preonenfelder an. Die Poincaré-Gruppe ist nach Konstruktion eine Symmetriegruppe der Feldgleichungen (1.36). Daher gehen wir von einem Hilbertraum von physikalischen Zuständen aus, welcher ein Darstellungsraum der Poincaré-Gruppe (Λ, ε) ist. Für einen Zustand $|a\rangle$ gilt:

$$|a'\rangle = \mathcal{U}(\Lambda, \varepsilon)\, |a\rangle \tag{1.38}$$

Ein vollständiger Satz vertauschbarer Operatoren ist $\{\mathbb{P}^2, W^2, \mathbb{P}_\mu, W\cdot N\}$, wobei $\mathbb{P}_\mu$ der Impulsoperator und W_μ der Pauli-Ljubanski-Vektor ist, vergl. z.B. [26].

Die Größen $\psi_z(x)$, welche in den Feldgleichungen (1.36) auftreten, sind sowohl Feldoperatoren als auch (Super-) Spinoren. Daher müssen sie unter der Wirkung der Poincaré-Gruppe der Relation

$$U^{-1}(\Lambda,\varepsilon)\,\psi_{z_1}(x')\,U(\Lambda,\varepsilon) = L_{z_1 z_2}(\Lambda,\varepsilon)\,\psi_{z_2}(\Lambda^{-1}(x'-\varepsilon)) \tag{1.39}$$

genügen.

Für eine infinitesimale Translation ist :

$$U(0,\varepsilon) = e^{-i\varepsilon^\mu \mathbb{P}_\mu} \tag{1.40}$$

$$L_{z_1 z_2}(0,\varepsilon) = \mathbb{1}_{z_1 z_2} \tag{1.41}$$

Damit folgt aus (1.39)

$$[\mathbb{P}_\mu, \psi_z(x)] = \mathcal{P}_\mu(x)\,\psi_z(x) \tag{1.42}$$

mit

$$\mathcal{P}_\mu(x) := -i\,\partial_\mu(x) \tag{1.43}$$

Die Gleichung (1.42) ist für uns von besonderer Wichtigkeit. Ebenso wie die Feldgleichung (1.36) enthält (1.42) die Zeitableitung. Daher ist (1.42) geeignet, um aus (1.36) die Zeitableitung zu eliminieren und so zu einer Eigenwertgleichung zu kommen.

Zu zeigen ist allerdings noch, daß (1.42) konsistent mit der Definition der Vertauschungsrelationen (1.21) ist. Dazu konstruiert man einen Operator $\mathbb{P}_\mu$, welcher die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Wir wollen im folgenden darlegen, daß

$$\mathbb{P}_\nu = \sum_{i_1=1}^{2} \int d^3x \left(-\pi^{i_1}_{\alpha_1}(x)\,\partial_\nu S^{i_1}_{\alpha_1}(x) - g_{\nu 0}\,\mathcal{L}(x) \right) \tag{1.44}$$

ein solcher Operator ist.

Beweis:

$$\sum_{i_1=1}^{2} \int d^3x \left[-\pi^{i_1}_{\alpha_1}(x)\, \partial_\nu\, S^{i_1}_{\alpha_1}(x)\,,\, S^{k}_{\beta}(y) \right]_{x^0=y^0} \tag{1.45}$$

$$= -\sum_{i_1} \int d^3x \, (i\xi^{-1}_{i_1})\, S^{+}_{i_1\alpha_1} \left\{ \partial_\nu S^{i_1}_{\alpha_1}(x)\,,\, S^{k}_{\beta}(y) \right\}_{x^0=y^0}$$

$$+ \sum_{i_1} \int d^3x \, (i\xi^{-1}_{i_1}) \left\{ S^{+}_{i_1\alpha_1}(x)\,,\, S^{k}_{\beta}(y) \right\}_{x^0=y^0} \partial_\nu\, S^{i_1}_{\alpha_1}(x)$$

Der zweite Summand ergibt mit den Vertauschungsrelationen (1.21) schon den gewünschten Term. Der erste Summand verschwindet für v=k wegen der Linearität der Ableitung und der Vertauschungsrelation (1.21). Es bleibt noch zu beweisen, daß für v=0 der verbleibende Rest von dem Beitrag von $\mathcal{L}$ kompensiert wird.

Mit Hilfe der Feldgleichungen (1.17) ergibt sich

$$\mathcal{L}_{kin}(x) = \sum_{i_1} \xi^{-1}_{i_1}\, \bar{S}^{i_1}_{\alpha_1}(x) \left(-i\partial\!\!\!/ + m_{i_1}\right)_{\alpha_1\alpha_2} S^{i_1}_{\alpha_2}(x)$$

$$= -2f \sum_{i_1 \dots i_4} \gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\, \gamma^0_{\alpha_3\alpha_4}\, S^{+}_{i_1\alpha_1}(x)\, S^{i_2}_{\alpha_2}(x)\, S^{+}_{i_3\alpha_3}(x)\, S^{i_4}_{\alpha_4}(x)$$

und damit

$$\mathcal{L}(x) = -f \sum_{i_1 \dots i_4} \gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\, \gamma^0_{\alpha_3\alpha_4}\, S^{+}_{i_1\alpha_1}(x)\, S^{i_2}_{\alpha_2}(x)\, S^{+}_{i_3\alpha_3}(x)\, S^{i_4}_{\alpha_4}(x) \tag{1.46}$$

$\partial_0 S^{i_1}_{\alpha_1}(x)$ in (1.45) kann man ebenfalls mit der Feldgleichung folgendermaßen ausdrücken:

$$-i\xi^{-1}_{i_1}\, \partial_0 S^{i_1}_{\alpha_1}(x) = -\xi^{-1}_{i_1} \left(-i\gamma^0\gamma^\ell\partial_\ell + m_k\right)_{\alpha_1\alpha_2} S^{i_1}_{\alpha_2}(x) \tag{1.47}$$

$$-2f \sum_{i_2 i_3 i_4} \gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\, \gamma^0_{\alpha_3\alpha_4}\, S^{i_2}_{\alpha_2}\, S^{+}_{i_3\alpha_3}\, S^{i_4}_{\alpha_4}$$

Aus (1.45), (1.46), (1.47) folgt:

$$\left[P_\nu , S_{\substack{k \\ \beta}}(y) \right] = -i \partial_\nu S_{\substack{k \\ \beta}}(y)$$

$$+ g_{0\nu} \sum_{i_1 \dots i_4} \gamma^0_{\alpha_1 \alpha_2} \gamma^0_{\alpha_3 \alpha_4} \Big(-2f \, S^+_{\substack{i_1 \\ \alpha_1}}(x) \Big\{ S_{\substack{i_2 \\ \alpha_2}}(x) S^+_{\substack{i_3 \\ \alpha_3}}(x) S_{\substack{i_4 \\ \alpha_4}}(x), S_{\substack{k \\ \beta}}(y) \Big\}$$

$$+ f \Big[S^+_{\substack{i_1 \\ \alpha_1}}(x) S_{\substack{i_2 \\ \alpha_2}}(x) S^+_{\substack{i_3 \\ \alpha_3}}(x) S_{\substack{i_4 \\ \alpha_4}}(x), S_{\substack{k \\ \beta}}(y) \Big] \Big)$$

Dieser Restterm verschwindet, denn wegen $[ab,c] = a\{b,c\} - \{a,c\}b$ gilt:

$$\left[S^+_{\substack{i_1 \\ \alpha_1}} S_{\substack{i_2 \\ \alpha_2}} S^+_{\substack{i_3 \\ \alpha_3}} S_{\substack{i_4 \\ \alpha_4}}, S_{\substack{k \\ \beta}} \right] = S^+_{\substack{i_1 \\ \alpha_1}} \left\{ S_{\substack{i_2 \\ \alpha_2}} S^+_{\substack{i_3 \\ \alpha_3}} S_{\substack{i_4 \\ \alpha_4}}, S_{\substack{k \\ \beta}} \right\} - \left\{ S^+_{\substack{i_1 \\ \alpha_1}}, S_{\substack{k \\ \beta}} \right\} S_{\substack{i_2 \\ \alpha_2}} S^+_{\substack{i_3 \\ \alpha_3}} S_{\substack{i_4 \\ \alpha_4}} \quad (1.48)$$

und

$$\left[S^+_{\substack{i_1 \\ \alpha_1}} S_{\substack{i_2 \\ \alpha_2}} S^+_{\substack{i_3 \\ \alpha_3}} S_{\substack{i_4 \\ \alpha_4}}, S_{\substack{k \\ \beta}} \right] = - S^+_{\substack{i_1 \\ \alpha_1}} S_{\substack{i_2 \\ \alpha_2}} \left\{ S^+_{\substack{i_3 \\ \alpha_3}}, S_{\substack{k \\ \beta}} \right\} - \left\{ S^+_{\substack{i_1 \\ \alpha_1}}, S_{\substack{k \\ \beta}} \right\} S_{\substack{i_2 \\ \alpha_2}} S^+_{\substack{i_3 \\ \alpha_3}} S_{\substack{i_4 \\ \alpha_4}} \quad (1.49)$$

Damit ist gezeigt, daß $\mathbb{P}_\nu$ aus (1.44) der Generator der Translation ist, der (1.42) erfüllt.

Durch das zeitgeordnete Produkt der Feldoperatoren $\psi_{Z_i}(x_i)$ definieren wir eine Menge von Zuständen im Zustandsraum:

$$T \, \psi_{I_1} \dots \psi_{I_n} |0\rangle = |I_1 \dots I_n\rangle_n \quad (1.50)$$

Wir können dann den Zustand $|a\rangle$ auch durch seine Projektionen auf die Zustände (1.50) charakterisieren. Diese Projektionen sind durch die τ-Funktionen gegeben:

$$\tau_n (I_1, \dots, I_n | a) := \langle 0 | T \psi_{I_1} \dots \psi_{I_n} | a \rangle \quad (1.51)$$

Sei $|a\rangle$ nun ein Eigenzustand von $\mathbb{P}_0$, dann läßt sich aus der Eigenwertgleichung für den Zustand $|a\rangle$:

$$\mathbb{P}_0 |a\rangle := P_0 |a\rangle \quad (1.52)$$

eine entsprechende Gleichung für die τ-Funktionen auf folgende Weise ab-

leiten. Aus (1.52) folgt

$$\langle 0|T\,\psi_{I_1}\dots\psi_{I_n}\,P_0|a\rangle \;=\; P_0\langle 0|T\,\psi_{I_1}\dots\psi_{I_n}|a\rangle$$

Für die linke Seite ergibt sich unter Beachtung der Vertauschungsrelation (1.37), der Gleichung (1.42) und der Definition des T-Produktes [13]:

$$\langle 0|T\,\psi_{I_1}\dots\psi_{I_n}\,P_0|a\rangle \;=\; \langle 0|P_0\,T\,\psi_{I_1}\dots\psi_{I_n}|a\rangle - \sum_{j=1}^{n} P_0(x_j)\langle 0|T\,\psi_{I_1}\dots\psi_{I_n}|a\rangle$$

Wegen $\langle 0|P_0 = P_0^{vac}\langle 0|$ erhalten wir damit folgende Gleichung für die τ-Funktionen:

$$-\sum_{j=1}^{n} P_0(x_j)\,\tau_n(I_1,\dots,I_n|a) \;=\; E\,\tau_n(I_1,\dots,I_n|a) \qquad (1.53)$$

mit

$$E \;:=\; (P_0 - P_0^{vac}) \qquad (1.54)$$

Aus der Darstellung eines Zustandes $|a\rangle$ durch die τ-Funktionen bekommen wir renormierte Energiewerte.

Während in der nichtrelativistischen Quantenmechanik ein Zustandsraum mit positiv-definiter Metrik vorliegt und dadurch eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation gegeben ist, induzieren die höheren Ableitungen im vorliegenden Modell eine indefinite Metrik des Zustandsraumes. Vektorräume mit indefiniter Metrik sind nach verschiedenen Gesichtspunkten untersucht worden. Allgemeine Überlegungen sind bei Nagy [6] zu finden, während Untersuchungen, die speziell das vorliegende Modell betreffen, von Stumpf [9a,b] durchgeführt wurden. Eine ausführliche Diskussion ist auch in [19] enthalten. Hier werden nur die Eigenschaften zusammengestellt, die im weiteren benötigt werden.

Bei der Berechnung der Eigenwertgleichungen, die durch Elimination der Zeitableitungen gewonnen werden, spielt die Zeitabhängigkeit keine dynamische Rolle; sie ist lediglich ein Parameter. Daher genügt es, eine spezielle Zustandsdarstellung zu benutzen, in welcher alle Zeiten null gesetzt

sind. Stumpf [15] konnte zeigen, daß dieser Übergang konsistent ist mit der relativistischen Invarianz der Bindungszustände.

Die Definition der τ-Funktionen in (1.51) enthält das T-Produkt. Dies ist nur für ungleiche Zeiten definiert, d.h. für $t_1 \neq t_2 \neq \ldots \neq t_n$. Da wir zu einer Darstellung übergehen wollen, für die $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0$ gilt, müssen wir das T-Produkt für diesen Fall fortsetzen:

$$T\,\psi_{I_1} \ldots \psi_{I_n}\big|_{t_1=\ldots=t_n=0} = (n!)^{-1} \sum_{\pi_1 \ldots \pi_n}^{} (-)^{\pi}\, \psi_{I_{\pi_1}} \ldots \psi_{I_{\pi_n}} \tag{1.55}$$

In dieser "gleichzeitigen Darstellung" können wir nun Basiszustände definieren:

$$\psi_{I_1}(0,\vec{x}_1) \ldots \psi_{I_n}(0,\vec{x}_n)\,|0\rangle \quad , \; n = 0,1,2,\ldots \tag{1.56}$$

Diese Basiszustände müssen ausreichen, um die Theorie zu beschreiben. Da formal $\mathbb{P}_0|a\rangle = -i\,\frac{\partial}{\partial t}\,|a\rangle$ ist, folgt, daß $|a,t\rangle = e^{-i\mathbb{P}_0 t}\,|a,0\rangle$ ist. Bindungszustände sind also durch $|a,0\rangle$ festgelegt.

Trotz möglicher Mißverständnisse ist es übersichtlicher, wenn wir auch hier die Abkürzung

$$\psi_{I_1} \ldots \psi_{I_n}\,|0\rangle \quad , \; n = 0,1,2,\ldots$$

beibehalten, wobei von nun an immer $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0$ zu denken ist.

Wir setzen nun

$$|I_1 \ldots I_n\rangle_n := \psi_{I_1} \ldots \psi_{I_n}\,|0\rangle \tag{1.57}$$

mit

$${}_n\langle I_1 \ldots I_n| := \left(|I_1 \ldots I_n\rangle_n\right)^{+} \tag{1.58}$$

Zu dieser Basis definieren wir die duale Basis

$$|K_1 \ldots K_n\rangle^n \quad , \; n = 0,1,2,\ldots \tag{1.59}$$

durch

$${}_m\langle I_1 \ldots I_m \,|\, K_1 \ldots K_n\rangle^n := \delta_{nm}\,(C^a)^{I_1 \ldots I_n}_{K_1 \ldots K_n} \tag{1.60}$$

wobei

$$C^{a}{}_{\nu_1 \dots \nu_m}{}^{I_1 \dots I_n}{}_{K_1 \dots K_m} := (n!)^{-1} \sum_{\pi_1 \dots \pi_n} (-)^{\pi} \delta_{I_1 K_{\pi_1}} \cdots \delta_{I_n K_{\pi_n}} \tag{1.61}$$

Die Metrik ist in diesem Raum gegeben durch

$$G_{nm} := {}_n\langle I_1 \dots I_n | K_1 \dots K_m \rangle_m \tag{1.62}$$

$$:= \langle 0 | (\psi_{I_1} \dots \psi_{I_n})(\psi_{K_1} \dots \psi_{K_m}) | 0 \rangle$$

Ein Zustand $|a\rangle$ läßt sich bezüglich einer solchen Basis darstellen durch

$$|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} \tau_n(K_1, \dots, K_n | a) \, | K_1 \dots K_n \rangle^n \tag{1.63}$$

oder durch

$$|a\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{-1} \tau^m(I_1, \dots, I_m | a) \, | I_1 \dots I_m \rangle_m \tag{1.64}$$

wobei

$$\tau^m(I_1, \dots, I_m | a) = (G^{mn} \tau_n)(I_1, \dots, I_m | a) \tag{1.65}$$

Für die Norm eines Zustandes $|a\rangle$ ergibt sich damit

$$\langle a | a \rangle = \tau_n^+(I_1, \dots, I_n | a) \, \tau^n(I_1, \dots, I_n | a) \tag{1.66}$$

$$= \tau_m^+(I_1, \dots, I_m | a) \, G^{mn} \, \tau_n(I_1, \dots, I_n | a)$$

Die Metrik ist zwar formal durch (1.62) gegeben; sie ist aber erst nach Lösung der dynamischen Feldgleichung explizit bekannt. Um dennoch eine allgemeine Aussage über die Definitheit der Norm eines Zustandes $|a\rangle$ zu bekommen, definieren wir ein weiteres Funktionensystem

$$\sigma_n(I_1, \dots, I_n | a) := (\tau_m^+ G^{mn})(I_1, \dots, I_n | a) \tag{1.67}$$

Ebenso wie für die τ-Funktionen formulieren wir auch für die ρ-Funktionen eine Eigenwertgleichung. Wir können dann allgemeine Aussagen über die Norm eines Zustandes machen, ohne den metrischen Fundamentaltensor explizit zu benutzen.

Kapitel 2: Funktionalraum

Funktionale werden in der Quantenfeldtheorie benutzt, da man mit ihrer Hilfe exakte Ausdrücke für die n-Punkt-Greensfunktionen ableiten kann. Durch diese Greensfunktionen lassen sich die Observablen des Quantensystems ausdrücken.

Die Einführung von erzeugenden Funktionalen nebst dazugehörigen Funktionalgleichungen durch Schwinger [28] ermöglichte es, für Kopplungstheorien ein Gleichungssystem der Greensfunktionen abzuleiten, das in einfachen Fällen exakt lösbar ist. Man ist also nicht auf die Störungstheorie angewiesen, die insbesondere bei Kopplungskonstanten in der Nähe von eins fraglich erscheint.

Stumpf und Mitarbeiter [29] (vergl. auch [16e] und die dort zitierten Arbeiten) haben aus der Funktionalmethode eine funktionale Quantenfeldtheorie der nichtlinearen Spinortheorie entwickelt. Diese Methode besteht in der direkten Konstruktion eines funktionalen Zustandsraumes eines Quantensystems; d.h. jedem Zustand des Hilbertraumes wird ein entsprechender Funktionalzustand zugeordnet.

Im folgenden werden wir die wichtigsten Eigenschaften der Zustandsfunktionale zusammenfassen.

1. Grundlagen

Der Funktionalraum V_F ist ein Fockraum, dem die Generatoren j_I und ∂_I zugrunde liegen, wobei gilt

$$j_I^+ = \partial_I \tag{2.1}$$

Der Grundzustand $|0\rangle_F$ ist gegeben durch

$$\partial_I |0\rangle_F = 0 \tag{2.2}$$

Die Generatoren j_I bilden Elemente einer unendlich dimensionalen Grassmann-Algebra; es gilt also

$$\begin{aligned} \{ j_{I_1}, \partial_{I_2} \} &= \delta_{I_1 I_2} \\ \{ j_{I_1}, j_{I_2} \} &= \{ \partial_{I_1}, \partial_{I_2} \} = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Durch

$$j_{I_1} \cdots j_{I_n} |0\rangle_F \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.4}$$

ist eine Basis in V_F gegeben.

Wegen (2.1) ist

$${}_F\langle 0| \partial_{I_n} \cdots \partial_{I_1} \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.5}$$

ebenfalls eine Basis.

Eine Orthogonalitätsrelation ergibt sich aus (2.1) - (2.5)

$${}_F\langle 0| \partial_{K_m} \cdots \partial_{K_1} | j_{I_1} \cdots j_{I_n} |0\rangle_F = \delta_{nm}\, n!\, (C^a)^{K_1 \cdots K_m}_{I_1 \cdots I_n} \tag{2.6}$$

wobei C^a durch (1.61) gegeben ist. Hieraus folgt, daß der Einsoperator im Funktionalraum zerlegbar ist nach

$$\mathbb{1}_F = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} \cdot j_{I_1} \cdots j_{I_n} |0\rangle_F \, {}_F\langle 0| \partial_{I_n} \cdots \partial_{I_1} \tag{2.7}$$

In Kapitel 1 haben wir gesehen, daß jedem Zustand |a> des Zustandsraums ein unendliches System von Funktionen

$$\tau_n(I_1, \ldots, I_n | a) \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.8}$$

zugeordnet werden kann. Daher können wir jeden Zustand |a> durch das erzeugende Funktional

$$T[j,a] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\, \tau_n(I_1, \ldots, I_n | a)\, j_{I_1} \cdots j_{I_n} \tag{2.9}$$

charakterisieren. (Über doppelt vorkommende Indizes wird summiert!) Die τ-Funktionen lassen sich aus dem T[j,a] durch n-fache Funktionalableitung wiedergewinnen:

$$\left(i^{-1} \partial_{I_n}\right) \cdots \left(i^{-1} \partial_{I_1}\right) T[j,a]\Big|_{j=0} = \tau_n(I_1, \ldots, I_n | a) \tag{2.10}$$

Mit Hilfe von (2.9) läßt sich jedem Zustand |a> des Zustandsraumes ein Zustand des Funktionalraumes zuordnen, der gegeben ist durch

$$|T[j,a]\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\, \tau_n(I_1, \ldots, I_n | a)\, j_{I_1} \cdots j_{I_n} |0\rangle_F \tag{2.11}$$

Der Funktionalraum soll nun ebenfalls eine Darstellung der Poincarē-Gruppe tragen, die dieselben Eigenwerte besitzt, wie sie die Darstellung im Zustandsraumes hat. Deshalb muß zu dem Satz kommutierender Operatoren des Zustandsraumes ($\{ \mathbf{P}^2,\ \mathbf{W}^2,\ \mathbf{P}_\mu,\ \mathbb{W}\ N\}$) ein entsprechender Satz im Funktionalraum konstruiert werden. Im allgemeinen ist dies in [27] dargestellt; wir benötigen im weiteren jedoch nur die Darstellung des Viererimpulsoperators im Funktionalraum:

$$\mathcal{P}_\mu = \int d^4x \; j_z(x)\; P_\mu(x)\; \partial_z(x) \tag{2.12}$$

wobei

$$P_\mu(x) = -i\partial_\mu(x) \tag{1.43}$$

und

$$j_z(x) = j_I \tag{1.30}$$

Die Darstellung des Viererimpulsoperators soll also folgende Eigenschaft haben:

$$\mathcal{P}_\mu \,|T[j,a]\rangle = p_\mu \,|T[j,a]\rangle \tag{2.13}$$

Zur Berechnung von (2.13) benützt man [13]:

$$\int d^4x \; j_z(x)\, P_0(x)\, \partial_z(x) \;|T[j,a]\rangle \tag{2.14}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{\ell=1}^{n} \int d^4x_1 \ldots d^4x_n \; P_0(x_\ell)\, \langle 0|T\, \psi_{z_1}(x_1) \ldots \psi_{z_n}(x_n)|a\rangle \; j_{z_1}(x_1) \ldots j_{z_n}(x_n)\,|0\rangle_F$$

$$= -E\,|T[j,a]\rangle$$

Damit können wir (1.53) ausnutzen und sehen, daß es sich bei den Eigenwerten E in (2.14) um renormierte Eigenwerte handelt, wie sie in (1.54) definiert sind.

Die Norm eines Zustandes |a> war gemäß (1.66) und (1.67)

$$\langle a|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(I_1, \ldots, I_n|a)\; \tau_n(I_1, \ldots, I_n|a) \tag{2.15}$$

Analog zu $|T[j,a]\rangle$ definieren wir einen weiteren Funktionalzustand $\langle R[\partial,a]|$:

$$\langle R[\partial,a]| := \sum_{m=0}^{\infty} i^m S_m(k_1,\dots,k_m|a) \frac{\delta}{\delta j} 0 | \partial_{k_m} \cdots \partial_{k_1} \tag{2.16}$$

Mit (2.6) ergibt sich

$$\langle R[\partial,a] | T[j,a] \rangle \tag{2.17}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(I_1,\dots,I_n|a)\, \tau_n(I_1,\dots,I_n|a)$$

Daher gilt

$$\langle a|a\rangle = \langle R[\partial,a] | T[j,a] \rangle \tag{2.18}$$

2. Funktionalgleichungen

Unser quantenfeldtheoretisches Modell ist durch (1.36) für die Feldoperatoren ψ_I

$$\mathbb{D}_{I_1 I_2} \psi_{I_2} + \mathbb{V}_{I_1 I_2 I_3 I_4} \psi_{I_2} \psi_{I_3} \psi_{I_4} = 0$$

und durch die Vertauschungsrelation (1.37)

$$\{\psi_{I_1}, \psi_{I_2}\}_{t_1=t_2} = A_{I_1 I_2}$$

gegeben. Die Information, die in diesen beiden Gleichungen steckt, übertragen wir in den Funktionalraum, indem wir eine zugehörige Funktionalgleichung ableiten. Dazu bilden wir

$$i^{-1} \partial_k |T[j,a]\rangle \tag{2.19}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \delta_{k I_\ell}\, \tau_n(I_1,\dots,I_n|a)\, j_{I_1} \cdots j_{I_{\ell-1}} j_{I_{\ell+1}} \cdots j_{I_n} |0\rangle_T$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \tau_n(k, I_1,\dots,I_n|a)\, j_{I_1} \cdots j_{I_n} |0\rangle_T$$

Das erste Gleichheitszeichen ergibt sich durch Verwendung der Definition von T[j,a] in (2.9) und Anwendung der Vertauschungsrelation (2.3).

Auf $\frac{1}{i}\,\partial_{K_2}|T[j,a]>$ können wir den kinematischen Operator $\mathbb{D}_{K_1K_2}$ anwenden. Die größte Schwierigkeit stellt dabei die Berechnung der Zeitableitung des T-Produkts in den τ-Funktionen dar. Nach Stumpf [30] gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\; T\,\psi_I\,\psi_{I_1}\cdots\psi_{I_n} \tag{2.20}$$

$$= T\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi_I\right)\psi_{I_1}\cdots\psi_{I_n} \;-\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{\ell}\,A_{I_\ell I}\cdot T\,\psi_{I_1}\cdots\psi_{I_{\ell-1}}\psi_{I_{\ell+1}}\cdots\psi_{I_n}$$

Damit ergibt sich

$$\mathbb{D}_{K_1K_2}\; i^{-1}\,\partial_{K_2}\,|T[j,a]> \tag{2.21}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\,<0|T\,(\mathbb{D}_{K_1K_2}\psi_{K_2})\psi_{I_1}\cdots\psi_{I_n}|a>\,j_{I_1}\cdots j_{I_n}|0>_F$$

$$+\; G^{0}_{K_1K_2}\,A_{K_2K_3}\,j_{K_3}\,|T[j,a]>$$

$\mathbb{D}$ ist durch (1.33) und G^0 durch (1.25) gegeben. Um einen Ausdruck für den potentiellen Term abzuleiten, bilden wir

$$(i^{-1}\partial_{K_4})(i^{-1}\partial_{K_3})(i^{-1}\partial_{K_2})\,|T[j,a]> \tag{2.22}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\;\tau_n(K_2,K_3,K_4,I_1,\ldots,I_n|a)\;j_{I_1}\cdots j_{I_n}|0>_F$$

Es ergibt sich dann

$$i\,\mathbb{V}_{K_1K_2K_3K_4}\;\partial_{K_4}\partial_{K_3}\partial_{K_2}\,|T[j,a]> \tag{2.23}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\;<0|T\,\mathbb{V}_{K_1K_2K_3K_4}\psi_{K_2}\psi_{K_3}\psi_{K_4}\psi_{I_1}\cdots\psi_{I_n}|a>\,j_{I_1}\cdots j_{I_n}|0>_F$$

Durch (2.21) und (2.23) wird ein Zusammenhang zwischen funktionalen Größen und τ-Funktionen hergestellt. Aus der Feldgleichung (1.36) erhalten wir folgende Beziehung zwischen den τ-Funktionen:

$$\langle 0|T\,\mathbb{D}_{k_1k_2}\psi_{k_2}\psi_{I_1}\cdots\psi_{I_n}|a\rangle \tag{2.24}$$

$$= -\,\langle 0|T\,V_{k_1k_2k_3k_4}\psi_{k_4}\psi_{k_3}\psi_{k_2}\psi_{I_1}\cdots\psi_{I_n}|a\rangle\ .$$

Damit ergibt sich die zu (1.36) gehörende Funktionalgleichung

$$\mathbb{D}_{k_1k_2}\partial_{k_2}|T[j,a]\rangle - i\,G^{\circ}_{k_1k_2}A_{k_2k_3}j_{k_3}|T[j,a]\rangle \tag{2.25}$$

$$= V_{k_1k_2k_3k_4}\partial_{k_4}\partial_{k_3}\partial_{k_2}|T[j,a]\rangle$$

Bilden wir nun von dieser Gleichung die Funktionalableitung n-ter Ordnung (n=0,1,2,...) und setzen wir dann j_I=0, so erhalten wir ein System gekoppelter Gleichungen für die τ-Funktionen.

Durch den zweiten Term auf der linken Seite, der von der Zeitableitung des T-Produktes verursacht wurde, werden δ-Funktionen in die Gleichung eingeführt. Diese Singularität kann jedoch eliminiert werden, indem man zu einem zweiten Funktional |F[j,a]> übergeht, welches ebenso wie das T-Funktional durch eine Potenzreihe darstellbar ist:

$$|F[j,a]\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\varphi_n(I_1,\ldots,I_n|a)\,j_{I_1}\cdots j_{I_n}|0\rangle_F \tag{2.26}$$

Definiert wird |F[j,a]> durch folgenden Zusammenhang mit |T[j,a]> (vergl. [17]):

$$|T[j,a]\rangle := \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,j_{I_1}F_{I_1I_2}\,j_{I_2}\right\}|F[j,a]\rangle \tag{2.27}$$

Dabei ist $F_{I_1I_2}$ der Propagator der freien Theorie, d.h. er genügt der Differentialgleichung

$$\mathbb{D}_{I_1I_2}F_{I_2I_3} = -i\,G^{\circ}_{I_1I_2}A_{I_2I_3} \tag{2.28}$$

Vergleiche dazu auch Anhang A.

Durch diese φ-Funktionen kann der Zustand |a> - neben der Darstellung durch die τ-Funktionen - auf eine zweite Weise dargestellt werden [2].
Da die φ-Funktionen Koeffizienten der antisymmetrischen Funktionale

$$\left(j_{I_1} \cdots j_{I_n} \right) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sind, können die φ-Funktionen selbst ebenfalls nur antisymmetrisch in den Indizes $(I_1 \ldots I_n)$ ein.

Setzen wir (2.27) in (2.25) ein und benützen wir folgende Abkürzungen:

$$\partial_K |T[j,a]\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2} j_{I_1} \mathcal{F}_{I_1 I_2} j_{I_2}\right\} d_K |\mathcal{F}[j,a]\rangle \tag{2.29}$$

und

$$d_K := \partial_K - \mathcal{F}_{KI} j_I \tag{2.30}$$

so erhalten wir die Funktionalgleichung für |F[j,a]>:

$$\mathbb{D}_{K_1 K_2} \partial_{K_2} |\mathcal{F}[j,a]\rangle = \mathbb{V}_{K_1 K_2 K_3 K_4} d_{K_4} d_{K_3} d_{K_2} |\mathcal{F}[j,a]\rangle \tag{2.31}$$

Der singuläre Term hat sich weggehoben.

Aus (2.13) ergibt sich wegen

$$\int d^4x\, d^4x'\, \mathcal{P}_\mu(x)\, \mathcal{F}_{zz'}(x,x')\, j_z(x)\, j_{z'}(x') = 0 \tag{2.32}$$

die Eigenwertgleichung für |F[j,a]>:

$$\mathcal{P}_\mu |\mathcal{F}[j,a]\rangle = p_\mu |\mathcal{F}[j,a]\rangle \tag{2.33}$$

3. Bindungszustände und Metrik

(2.33) ist für μ=0 eine in der Zeitableitung lineare Gleichung für |F[j,a]>. Eine zweite Gleichung mit linearer Zeitableitung stellt (2.31) dar. Daher können wir die Zeitableitung eliminieren und erhalten so eine funktionale Energie-Eigenwertgleichung.

Unter Beachtung der Definitionen von $\mathbb{D}$ (1.33) und $\mathbb{V}$ (1.34) folgt für (2.31):

$$\int d^4x\; j_{z_1}(x)\left(-i\partial_0 \mathbb{1}_{z_1 z_2}\right)\; \partial_{z_2}(x)\,|\mathcal{F}[j,a]\rangle$$

$$+\int d^4x\; j_{z_1}(x)\left\{\gamma^0\gamma^k(-i\partial_k(x)) + \gamma^0 m_{z_1}\right\}_{z_1 z_2}\; \partial_{z_2}(x)\,|\mathcal{F}[j,a]\rangle \qquad (2.34)$$

$$=\int d^4x\; G^0_{z_1 z}\, V_{z z_2 z_3 z_4}\; j_{z_1}(x)\, d_{z_2}(x)\, d_{z_3}(x)\, d_{z_4}(x)\,|\mathcal{F}[j,a]\rangle$$

Mit (1.53) und (2.14) folgt für (2.33) im Fall $\mu=0$:

$$\int d^4x\; j_{z_1}(x)\left(-i\partial_0 \mathbb{1}_{z_1 z_2}\right)\partial_{z_2}(x)\,|\mathcal{F}[j,a]\rangle \;=\; -E\,|\mathcal{F}[j,a]\rangle \qquad (2.35)$$

Daraus ergibt sich die Energie-Eigenwertgleichung:

$$E\,|\mathcal{F}[j,a]\rangle$$

$$=\int d^4x\; j_{z_1}(x)\left\{\gamma^0\gamma^k(-i\partial_k) + \gamma^0 m_{z_1}\right\}_{z_1 z_2}\partial_{z_2}(x)\;|\mathcal{F}[j,a]\rangle \qquad (2.36)$$

$$-\int d^4x\; G^0_{z_1 z}\, V_{z z_2 z_3 z_4}\; j_{z_1}(x)\, d_{z_4}(x)\, d_{z_3}(x)\, d_{z_2}(x)\,|\mathcal{F}[j,a]\rangle$$

oder kurz

$$E\,|\mathcal{F}[j,a]\rangle \;=\; K\,|\mathcal{F}[j,a]\rangle + \mathcal{P}_{ges}\,|\mathcal{F}[j,a]\rangle \qquad (2.37)$$

wobei

$$K \;=\; \left\{\gamma^0\gamma^k(-i\partial_k) + \gamma^0 m_{I_1}\right\}_{I_1 I_2}\, j_{I_1}\partial_{I_2} \qquad (2.38)$$

$$\mathcal{P}_{ges} \;=\; -\left(\gamma^0 \mathbb{V}\right)_{I_1 I_2 I_3 I_4}\; j_{I_1}\, d_{I_4}\, d_{I_3}\, d_{I_2} \qquad (2.39)$$

($\mathbb{V}$, G^μ sind in (1.34) und (1.25) definiert.)

Die Gleichung (2.37) stellt bei Berücksichtigung der Definition von $|F[j,a]\rangle$ in (2.26) ein unendliches gekoppeltes Gleichungssystem für die Funktionen

$$\varphi_n(I_1,\dots,I_n|a) \quad ; \quad n = 0,1,2,\dots$$

dar. Der kinematische Anteil (2.38) dieser Gleichung enthält keine Kopplung der verschiedenen Sektoren n=0,1,2,... . Aufgrund der Definition von d_I in (2.30) koppelt dagegen der Wechselwirkungsanteil (2.39) die verschiedenen Sektoren auf folgende Weise:

$$j_{I_1} d_{I_4} d_{I_3} d_{I_2} \tag{2.40}$$

$$= j_{I_1}\left(\partial_{I_4} - F_{I_4 k_4} j_{k_4}\right)\left(\partial_{I_3} - F_{I_3 k_3} j_{k_3}\right)\left(\partial_{I_2} - F_{I_2 k_2} j_{k_2}\right)$$

$$= - F_{I_4 k_4} F_{I_3 k_3} F_{I_2 k_2} j_{I_1} j_{k_4} j_{k_3} j_{k_2} \tag{a}$$

$$+ F_{I_4 k_4} F_{I_3 k_3} j_{I_1} j_{k_4} j_{k_3} \partial_{I_2} + F_{I_3 k_3} F_{I_2 k_2} j_{I_1} j_{k_3} j_{k_2} \partial_{I_4}$$

$$+ F_{I_4 k_4} F_{I_2 k_2} j_{I_1} j_{k_4} j_{k_2} \partial_{I_3} \tag{b}$$

$$+ F_{I_3 k_3} j_{I_1} j_{k_3} \partial_{I_4} \partial_{I_2} - F_{I_4 k_4} j_{I_1} j_{k_4} \partial_{I_3} \partial_{I_2}$$

$$- F_{I_2 k_2} j_{I_1} j_{k_2} \partial_{I_4} \partial_{I_3} \tag{c}$$

$$+ j_{I_1} \partial_{I_4} \partial_{I_3} \partial_{I_2} \tag{d}$$

An dieser Stelle sind wir zur Normalordnung übergegangen, welche bewirkt, daß in dem Produkt $d_{I_4} d_{I_3} d_{I_2}$ keine Anteile mit $F_{Z_1 Z_2}(0)$ enthalten sind.

Der Term (2.40 a) bedeutet eine Kopplung an den Sektor (n-4); die Terme (2.40 b) stellen eine Kopplung an den Sektor (n-2), der Term (2.40 d) eine

solche an den Sektor (n+2) dar. Allein die Terme (2.40 c) sind sektorerhaltend.

Da wir in dieser Arbeit an Bindungszuständen interessiert sind, nehmen wir für die Eigenwertgleichung (2.36) von der Summe in (2.40) nur die Summanden (2.40 c) mit und betrachten die restlichen Terme (2.40 a, b, d) als eine Polarisationswolke aus Preon-Antipreon-Paaren. Wir definieren daher einen n-Teilchenbindungszustand durch:

$$|F_n[j,a]\rangle := \frac{i^n}{n!}\,\varphi_n(I_1,\dots,I_n|a)\,j_{I_1}\cdots j_{I_n}|0\rangle_{\mp} \tag{2.41}$$

$|F_n[j,a]\rangle$ genügt der Gleichung (2.37), wenn wir P_{ges} (2.39) durch den sektorerhaltenden Wechselwirkungsanteil

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = (\mathcal{G}^{\circ}V)_{I_1I_2I_3I_4}\big(& F_{I_2K}\, j_{I_1} j_K \partial_{I_4}\partial_{I_3} \\ & + F_{I_3K}\, j_{I_1} j_K \partial_{I_2}\partial_{I_4} \\ & + F_{I_4K}\, j_{I_1} j_K \partial_{I_3}\partial_{I_2}\big) \end{aligned} \tag{2.42}$$

ersetzen. Durch Umbenennen der Indizes folgt aus (2.42):

$$\mathcal{P} = (\mathcal{G}^{\circ}\hat{V})_{I_1I_2I_3I_4}\,F_{I_2I}\,j_{I_1} j_I \partial_{I_3}\partial_{I_4} \tag{2.43}$$

wobei

$$\hat{V}_{I_1I_2I_3I_4} = -V_{I_1I_2I_3I_4} + V_{I_1I_3I_2I_4} + V_{I_1I_4I_3I_2} \tag{2.44}$$

Aus (2.37) mit (2.43) lassen sich die Energieeigenwerte von n-Preonenbindungszuständen berechnen. Um die Norm eines solchen Zustandes $|a\rangle$ zu berechnen, müssen wir nach (2.15) die Funktionen ς_n und τ_n kennen, wobei für ς_n gilt

$$\varsigma_n = \tau_m^{+}\,G^{mn} \tag{1.67}$$

Wäre die Metrik G^{mn} bekannt, so würde die Kenntnis von τ_n ausreichen, um die Norm von $|a\rangle$ zu berechnen. Aus der Definition von G_{mn} durch (1.62) ist ersichtlich, daß G_{mn} nur bekannt ist, wenn die 2n-Punktfunktionen

bekannt sind. Die Metrik ist hier also nicht vorgegeben, sondern ist selbst ein Bestandteil des dynamischen Problems.

Um diesen Schwierigkeiten zu entgehen, versuchen wir, die S_n direkt durch ein zweites Gleichungssystem zu bestimmen [18]. In (2.16) hatten wir den Funktionalzustand $\langle R[\partial,a]|$ definiert. Genauso, wie wir ein äquivalentes F-Funktional zum T-Funktional in (2.27) definiert haben, gehen wir vom R-Funktional zu einem S-Funktional über:

$$\langle S[\partial,a]| := \sum_{n=0}^{\infty} i^n \sigma_n(I_1,\dots,I_n|a) \neq\langle 0|\partial_{I_n}\dots\partial_{I_1} \tag{2.45}$$

Für dieses S-Funktional lassen sich "Linksgleichungen" ableiten (vergl. dazu Stumpf [9]):

$$\langle S[\partial,a]|E = \langle S[\partial,a]|K + \langle S[\partial,a]|P_{ges} \tag{2.46}$$

Dies ist ein System von Gleichungen für σ_n.

Definieren wir

$$\langle S_n[\partial,a]| := i^n \sigma_n(I_1,\dots,I_n|a) \neq\langle 0|\partial_{I_n}\dots\partial_{I_1} \tag{2.47}$$

als Lösung von (2.46), indem wir auch dort wieder P_{ges} durch P gemäß (2.43) ersetzen, so charakterisiert $\sigma_n(I_1,\dots,I_n|a)$ ebenfalls einen n-Teilchenbindungszustand.

Schließlich können wir das Skalarprodukt im Funktionalraum auch durch die Funktionale S und F darstellen [9]:

$$\langle a|a\rangle = \langle S[\partial,a]|F[j,a]\rangle \tag{2.48}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m(I_1,\dots,I_m|a)\,\varphi_m(I_1,\dots,I_m|a)$$

Von der Summe in (2.48) trägt nur der Term m=n für die Norm eines n-Teilchenbindungszustandes bei.

In der Gleichung für die n-Teilchenbindungszustände kommt die Zeit $t=x^0$ nur noch als freier Parameter vor, da keine Zeitableitungen mehr vorhanden sind. Dennoch handelt es sich um eine relativistisch invariante Eigenwertgleichung, wie von Stumpf [15] gezeigt wurde. Daher ist in den Funktionen

$\varphi(I_1,\ldots,I_n|a)$ die Zeit ebenfalls nur als Parameter erhalten. Ein Dreiteilchenzustand $\varphi_{3\ z_1z_2z_3}(x_1,x_2,x_3|a)$ ist also bereits durch

$$\varphi_{3\ z_1z_2z_3}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3|a) \quad = \quad \varphi_{3\ z_1z_2z_3}(0,\vec{x}_1;0,\vec{x}_2;0,\vec{x}_3|a) \qquad (2.49)$$

gekennzeichnet, wobei wir $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$ als die Koordinaten der Konstituenten interpretieren. Verlangen wir, daß die Funktion φ_3 verschwindet, wenn die Relativkoordinaten unendlich werden, so ist dadurch das Eigenwertproblem festgelegt.

Im nächsten Kapitel werden wir dennoch aus formalen Gründen (wie auch schon in Kapitel 1 erwähnt) die vierkomponentige Schreibweise beibehalten und erst bei den Näherungen zur Darstellung (2.49) übergehen.

Kapitel 3: Der Dreiteilchensektor

In diesem Kapitel wollen wir das Gleichungssystem für φ_3 in (2.49) ableiten. Dabei wollen wir schon in diesen allgemeinen Betrachtungen besondere Aufmerksamkeit auf die Hilfsfeldindizes legen. Diese sind, wie in Kapitel 1 gezeigt, durch den formalen Übergang einer Feldgleichung mit Ableitungen zweiter Ordnung in ein System von Feldgleichungen mit Ableitungen erster Ordnung entstanden und haben daher keine direkte physikalische Bedeutung. Unser Ziel wird es also sein, diese Freiheitsgrade aus den Dreiteilchengleichungen wieder zu eliminieren, um so zu einer Gleichung zu kommen, die sich auf die ursprünglichen physikalischen Größen bezieht. Ein erster Schritt in diese Richtung besteht darin, daß wir bezüglich der Hilfsfeldindizes eine Transformation auf "Relativfunktionale" vornehmen. Neben der Zerlegung des Indexsatzes I gemäß (1.29) und (1.30) benutzen wir deshalb im folgenden vor allem die Zerlegung

$$I \quad = \quad i, a \tag{3.1}$$

wobei

$$a \quad := \quad r\alpha, x$$

Wir gehen von der Dreiteilchengleichung

$$E\,|\mathcal{F}_3[j,a]\rangle \quad = \quad K\,|\mathcal{F}_3[j,a]\rangle \;+\; \mathcal{P}\,|\mathcal{F}_3[j,a]\rangle \tag{3.2}$$

aus, wobei

$$|\mathcal{F}_3[j,a]\rangle \quad = \quad (3!)^{-1}\, i^3\, \varphi(I_1,I_2,I_3|a)\; j_{I_1} j_{I_2} j_{I_3} |0\rangle_{\mathcal{F}} \tag{3.3}$$

und

$$K \quad = \quad \left(\gamma^0 \gamma^k (-i\partial_k) + \gamma^0 m_{I_1}\right)_{I_1 I_2}\; j_{I_1} \partial_{I_2} \tag{3.4}$$

$$\mathcal{P} \quad = \quad \left(\gamma^0 \hat{V}\right)_{I_1 I I_3 I_4}\; \mathcal{F}_{I I_2}\; j_{I_1} j_{I_2} \partial_{I_3} \partial_{I_4} \tag{3.5}$$

$$E \quad = \quad \left(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_0^{vac}\right) \tag{3.6}$$

$G^{\mu}_{I_1 I_2}$ ist definiert in (1.25); $\hat{V}$ ist definiert in (2.44), (1.34); $F_{I_1 I_2}$ ist gegeben in Anhang A.

Die zu (3.2) gehörende Linksgleichung

$$\langle S_3[\partial,a]|\, E \;=\; \langle S_3[\partial,a]|\, K \;+\; \langle S_3[\partial,a]|\, P \tag{3.7}$$

mit

$$\langle S_3[\partial,a] \;=\; i^3\, \sigma(I_1,I_2,I_3|a)\, \langle 0|\partial_{I_3}\partial_{I_2}\partial_{I_1} \tag{3.8}$$

behandeln wir in Abschnitt 4.5 auf analoge Weise.

1. Relativfunktionale

Zuerst transformieren wir die Funktionale j_I, ∂_I in folgender Weise:

$$\bar{j}_I = u_{IK}\, j_K \quad , \quad \bar{\partial}_I = u_{IK}\,\partial_K \tag{3.9}$$

wobei

$$u_{IK} = u_{ik}\,\delta_{ab} \tag{3.10}$$

und

$$u_{ik} := (2)^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{ik} \tag{3.11}$$

$$\delta_{ab} := \delta_{r\rho}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta(x-y) \tag{3.12}$$

Diese Transformation berührt nur die Hilfsfelder (i,k) und läßt alle anderen Indizes $a=r\alpha,x$ unberührt. Aufgrund der Definitionen (3.10), (3.11) gilt:

$$u_{IK} = u^{T}_{IK} = u^{-1}_{IK} \tag{3.13}$$

Wegen dieser Eigenschaften bleiben auch die Vertauschungsrelationen (2.3) unberührt und es gilt für die Relativfunktionale $\bar{j}_I$, $\bar{\partial}_I$:

$$\{\bar{j}_{I_1}, \bar{\partial}_{I_2}\} = \delta_{I_1 I_2} \tag{3.14}$$

$$\{\bar{j}_{I_1}, \bar{j}_{I_2}\} = \{\bar{\partial}_{I_1}, \bar{\partial}_{I_2}\} = 0$$

Im folgenden drücken wir die Größen in (3.2) - (3.5) durch die Relativfunktionale aus.

$$|F_3[j,a]\rangle = -\frac{i}{6}\varphi(I_1,I_2,I_3|a)\, j_{I_1} j_{I_2} j_{I_3}|0\rangle_F \tag{3.15}$$

$$= -\frac{i}{6}\bar{\varphi}(I_1I_2I_3|a)\, U_{I_1k_1} j_{k_1} U_{I_2k_2} j_{k_2} U_{I_3k_3} j_{k_3}|0\rangle_F$$

$$= -\frac{i}{6}\bar{\varphi}(I_1I_2I_3|a)\, \bar{j}_{I_1}\bar{j}_{I_2}\bar{j}_{I_3}|0\rangle_F$$

$$= |\bar{F}_3[\bar{j},a]\rangle$$

wobei

$$\bar{\varphi}(I_1I_2I_3|a) = \varphi(k_1,k_2,k_3|a)\, U_{k_1I_1} U_{k_2I_2} U_{k_3I_3} \tag{3.16}$$

Da die $\bar{j}_I$, $\bar{\partial}_I$ dieselben Vertauschungsrelationen erfüllen wie die j_I, ∂_I, müssen auch die Funktionen $\bar{\varphi}$ total antisymmetrisch unter Permutationen der Indizes $(I_1I_2I_3)$ sein.

Der kinematische Operator K transformiert sich folgendermaßen:

$$K = \left(\gamma^0\gamma^k(-i\partial_k) + \gamma^0 m_{I_1}\right)_{I_1I_2} j_{I_1}\partial_{I_2} \tag{3.17}$$

$$= \left(\gamma^0\gamma^k(-i\partial_k) + \gamma^0 m_{I_1}\right)_{I_1I_2} U_{I_1k_1} U_{I_2k_2}\, \bar{j}_{k_1}\bar{\partial}_{k_2}$$

$$= \Big[\left(\gamma^0\gamma^k(-i\partial_k)\right)_{a_1a_2}\delta_{i_1i_2}\delta_{a_1b_1}U_{i_1k_1}\delta_{a_2b_2}U_{i_2k_2}$$

$$+ \gamma^0_{a_1a_2} m_{i_1}\delta_{i_1i_2}\delta_{a_1b_1}U_{i_1k_1}\delta_{a_2b_2}U_{i_2k_2}\Big]\, \bar{j}_{\substack{k_1\\b_1}}\bar{\partial}_{\substack{k_2\\b_2}}$$

$$K = \Big[\big(\gamma^0 \gamma^k (-i\partial_k) \big)_{b_1 b_2} U_{k_1 i_1} U_{k_2 i_2} \qquad (3.17)$$

$$+ \gamma^0_{b_1 b_2} U_{k_1 i_1} m_{i_1} U_{i_1 k_2} \Big] \bar{f}^{k_1}_{b_1} \bar{\delta}^{k_2}_{b_2}$$

$$= \Big[\big(\gamma^0 \gamma^k (-i\partial_k) \big)_{b_1 b_2} \delta_{k_1 k_2}$$

$$+ \gamma^0_{b_1 b_2} \cdot \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) \delta_{k_1 k_2} + \gamma^0_{k_1 b_2} \cdot \tfrac{1}{2}(m_1 - m_2) \sigma^1_{k_1 k_2} \Big] \bar{f}^{k_1}_{b_1} \bar{\delta}^{k_2}_{b_2}$$

Wegen (3.13) und

$$U_{k_1 i_1} m_{i_1} U_{i_1 k_2} = U_{k_1 1} m_1 U_{1 k_2} + U_{k_1 2} m_2 U_{2 k_2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_1 - m_2 \\ m_1 - m_2 & m_1 + m_2 \end{pmatrix}_{k_1 k_2} \qquad (3.18)$$

$$= \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) \delta_{k_1 k_2} + \tfrac{1}{2}(m_1 - m_2) \sigma^1_{k_1 k_2}$$

wird

(3.20)

$$K = \Big[\big(\gamma^0 \gamma^k (-i\partial_k) + \gamma^0 M \big]_{b_1 b_2} \delta_{k_1 b_2} + \tfrac{1}{2} \gamma^0_{b_1 b_2} \Delta m \sigma^1_{k_1 k_2} \Big] \bar{f}^{k_1}_{b_1} \bar{\delta}^{k_2}_{b_2}$$

wobei

$$M := \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) \qquad (3.21)$$

$$\Delta m := (m_1 - m_2) \qquad (3.22)$$

Mit den Abkürzungen

$$\mathcal{D}_{b_1 b_2} = \big(\gamma^0 \gamma^k (-i\partial_k) + \gamma^0 M \big)_{b_1 b_2} \qquad (3.23)$$

$$\mathcal{M}_{b_1 b_2} = \tfrac{1}{2} \Delta m \, \gamma^0_{b_1 b_2} \qquad (3.24)$$

ergibt sich für K:

$$K = \left(\mathcal{D}_{b_1 b_2} \delta_{k_1 k_2} + \mathcal{M}_{b_1 b_2} \sigma^{\wedge}_{k_1 k_2} \right) \bar{\jmath}^{k_1}_{b_1} \bar{\partial}^{k_2}_{b_2} \tag{3.25}$$

Definieren wir

$$\mathbb{K}^{k_1 k_2}_{b_1 b_2} := \left(\mathcal{D}_{b_1 b_2} \delta_{k_1 k_2} + \mathcal{M}_{b_1 b_2} \sigma^{\wedge}_{k_1 k_2} \right) \tag{3.26}$$

so läßt sich K schließlich kompakt schreiben als

$$K = \mathbb{K}_{I_1 I_2} \bar{\jmath}_{I_1} \bar{\partial}_{I_2} \tag{3.27}$$

Für den Operator P folgt durch Übergang zu den Relativfunktionalen

$$P = \left(G^{\circ} \hat{V} \right)_{I_1 I I_3 I_4} F_{I I_2} j_{I_1} j_{I_2} \partial_{I_3} \partial_{I_4} \tag{3.28}$$

$$= \left(G^{\circ} \hat{V} \right)_{I_1 I I_3 I_4} F_{I I_2} U_{I_1 k_1} U_{I_2 k_2} U_{I_3 k_3} U_{I_4 k_4} \bar{\jmath}_{k_1} \bar{\jmath}_{k_2} \bar{\partial}_{k_3} \bar{\partial}_{k_4}$$

Wegen (1.25), (1.34) und (2.44) enthält $(G^{\circ} \hat{V})$ nur im ersten Index I_1 die Hilfsfeldkomponente ξ_{i_1}. In den anderen Indizes $(I I_3 I_4)$ tritt der Hilfsfeldindex nur formal auf, was bedeutet, daß über ihn summiert werden soll. Der Propagator F hängt wegen (A.10) von den Hilfsfeldern nur als Index ab. Daher gilt

$$\left(G^{\circ} \hat{V} \right)_{I_1 I I_3 I_4} F_{I I_2} U_{I_1 k_1} U_{I_2 k_2} U_{I_3 k_3} U_{I_4 k_4} \tag{3.29}$$

$$= \left(G^{\circ} \hat{V} \right)_{b_1 a b_3 b_4} \left(\sum_{i_1} \xi_{i_1} U_{i_1 k_1} \right) \left(\sum_{i_2} F^{i_2}_{a b_2} U_{i_2 k_2} \right) \left(\sum_{i_3} U_{i_3 k_3} \right) \left(\sum_{i_4} U_{i_4 k_4} \right)$$

Mit

$$\sum_i U_{ik} = (2)^{-1/2} \, (2,0)_k \tag{3.30}$$

$$\sum_i \xi_i U_{ik} = (2)^{-1/2} \, \xi_1 \, (0,2)_k \tag{3.31}$$

$$\sum_i F^i_{ab} U_{ik} = (2)^{-1/2} \left(F^+_{ab}, F^-_{ab} \right)_k \tag{3.32}$$

und

$$F^{\pm}_{ab} := F^{1}_{ab} \pm F^{2}_{ab} \tag{3.33}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} P &= (\zeta^{\circ}\hat{V})_{b_1 a b_3 b_4} \cdot 1/4\, \xi_1 (2\bar{j}^{2}_{b_1})\left(F^{+}_{ab_2}\bar{j}^{1}_{b_2} + F^{-}_{ab_2}\bar{j}^{2}_{b_2}\right) 2\bar{\partial}_{1\,b_3} \cdot 2\bar{\partial}_{1\,b_4} \\ &= 2\xi_1 (\zeta^{\circ}\hat{V})_{b_1 a b_3 b_4} \left(F^{+}_{ab_2}\, \bar{j}^{2}_{b_1}\bar{j}^{1}_{b_2}\bar{\partial}_{1\,b_3}\bar{\partial}_{1\,b_4} \right. \\ &\qquad \left. + F^{-}_{ab_2}\, \bar{j}^{2}_{b_1}\bar{j}^{2}_{b_2}\bar{\partial}_{1\,b_3}\bar{\partial}_{1\,b_4} \right) \\ &= \left[2\xi_1 (\zeta^{\circ}\hat{V})_{a_1 a a_3 a_4} F^{+}_{aa_2}\, \delta_{i_1 2}\delta_{i_2 1}\delta_{i_3 1}\delta_{i_4 1} \right. \\ &\qquad \left. + 2\xi_1 (\zeta^{\circ}\hat{V})_{a_1 a a_3 a_4} F^{-}_{aa_2}\, \delta_{i_1 2}\delta_{i_2 2}\delta_{i_3 1}\delta_{i_4 1} \right] \bar{j}^{i_1}_{a_1}\bar{j}^{i_2}_{a_2}\bar{\partial}_{i_3\,a_3}\bar{\partial}_{i_4\,a_4} \end{aligned} \tag{3.34}$$

Definieren wir

$$W^{\pm}_{a_1 a_2 a_3 a_4} := 2\xi_1 (\zeta^{\circ}\hat{V})_{a_1 a a_3 a_4} F^{\pm}_{aa_2} \tag{3.35}$$

$$\underset{2\,1\,1\,1}{\delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}} := \delta_{i_1 2}\delta_{i_2 1}\delta_{i_3 1}\delta_{i_4 1} \tag{3.36}$$

so folgt

$$P = \left(W^{+}_{a_1 a_2 a_3 a_4} \underset{2\,1\,1\,1}{\delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}} + W^{-}_{a_1 a_2 a_3 a_4} \underset{2\,2\,1\,1}{\delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}} \right) \bar{j}^{i_1}_{a_1}\bar{j}^{i_2}_{a_2}\bar{\partial}_{i_3\,a_3}\bar{\partial}_{i_4\,a_4} \tag{3.37}$$

Fassen wir die Koeffizienten in (3.37) durch die Definition

$$\underset{a_1 a_2 a_3 a_4}{W_{i_1 i_2 i_3 i_4}} := W^{+}_{a_1 a_2 a_3 a_4} \underset{2\,1\,1\,1}{\delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}} + W^{-}_{a_1 a_2 a_3 a_4} \underset{2\,2\,1\,1}{\delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}} \tag{3.38}$$

zusammen, so läßt sich P kompakt schreiben als

$$P = W_{I_1 I_2 I_3 I_4}\, \bar{j}_{I_1}\bar{j}_{I_2}\bar{\partial}_{I_3}\bar{\partial}_{I_4} \tag{3.39}$$

2. Gleichungssystem für $\bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3|a)$

Die Eigenwertgleichung des Dreiteilchensektors in Relativfunktionalen lautet mit den Umformungen der Operatoren K und P:

$$E\,\bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3|a)\;\bar{\jmath}_{I_1}\bar{\jmath}_{I_2}\bar{\jmath}_{I_3}|0\rangle_{\mp} \qquad \text{a)} \quad (3.40)$$

$$= K_{k_1 k_2}\,\bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3|a)\;\bar{\jmath}_{k_1}\bar{\delta}_{k_2}\bar{\jmath}_{I_1}\bar{\jmath}_{I_2}\bar{\jmath}_{I_3}|0\rangle_{\mp} \qquad \text{b)}$$

$$+ W_{k_1 k_2 k_3 k_4}\,\bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3|a)\;\bar{\jmath}_{k_1}\bar{\jmath}_{k_2}\bar{\delta}_{k_3}\bar{\delta}_{k_4}\bar{\jmath}_{I_1}\bar{\jmath}_{I_2}\bar{\jmath}_{I_3}|0\rangle_{\mp} \qquad \text{c)}$$

Um ein Gleichungssystem für die Koeffizientenfunktionen $\bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3|a)$ zu erhalten, multiplizieren wir diese Gleichung von links mit

$$\langle 0|\bar{\delta}_{L_3}\bar{\delta}_{L_2}\bar{\delta}_{L_1}|_{\mp} \qquad (3.41)$$

Mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (3.14), der Orthogonalitätsrelation (2.6) und wegen

$$\bar{\delta}_I|0\rangle_{\mp} = \langle 0|\bar{\jmath}_I|_{\mp} = 0 \qquad (3.42)$$

lassen sich die mit (3.41) multiplizierten Ausdrücke (3.40 a,b,c) ausrechnen.

Es ergibt sich

für (3.40 a)

$$\langle 0|\bar{\delta}_{L_3}\bar{\delta}_{L_2}\bar{\delta}_{L_1}\bar{\jmath}_{I_1}\bar{\jmath}_{I_2}\bar{\jmath}_{I_3}|0\rangle_{\mp} = 6\,(C^a)^{L_1 L_2 L_3}_{I_1 I_2 I_3} \qquad (3.43)$$

für (3.40 b)

$$\langle 0|\bar{\delta}_{L_3}\bar{\delta}_{L_2}\bar{\delta}_{L_1}\bar{\jmath}_{k_1}\bar{\delta}_{k_2}\bar{\jmath}_{I_1}\bar{\jmath}_{I_2}\bar{\jmath}_{I_3}|0\rangle_{\mp} \qquad (3.44)$$

$$= 6\left(\delta_{k_1 L_1}(C^a)^{k_2 L_2 L_3}_{I_1 I_2 I_3} - \delta_{k_1 L_2}(C^a)^{k_2 L_1 L_3}_{I_1 I_2 I_3} + \delta_{k_1 L_3}(C^a)^{k_2 L_1 L_2}_{I_1 I_2 I_3}\right)$$

für (3.40 c)

$$\langle 0 | \bar{\partial}_{L_3} \bar{\partial}_{L_2} \bar{\partial}_{L_1} \bar{\jmath}_{K_1} \bar{\jmath}_{K_2} \bar{\partial}_{K_3} \bar{\partial}_{K_4} \bar{\jmath}_{I_1} \bar{\jmath}_{I_2} \bar{\jmath}_{I_3} | 0 \rangle \tag{3.45}$$

$$= \quad 36 \, (C^a)^{L_1 L_2 L_3}_{K_1 K_2 N} \; \delta_{NM} \; (C^a)^{K_4 K_3 M}_{I_1 I_2 I_3}$$

Aus der mit (3.41) multiplizierten Gleichung (3.40) folgt

$$E \, \bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3 | a) \; 6 \, (C^a)^{L_1 L_2 L_3}_{I_1 I_2 I_3}$$

$$= \; 6 \left(\mathbb{K}_{L_1 K_1} \delta_{L_2 K_2} \delta_{L_3 K_3} + \delta_{L_1 K_1} \mathbb{K}_{L_2 K_2} \delta_{L_3 K_3} + \delta_{L_1 K_1} \delta_{L_2 K_2} \mathbb{K}_{L_3 K_3} \right) \cdot$$

$$\cdot \, (C^a)^{K_1 K_2 K_3}_{I_1 I_2 I_3} \; \bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3 | a) \tag{3.46}$$

$$+ \; 36 \, (C^a)^{L_1 L_2 L_3}_{K_1 K_2 N} \; \mathbb{W}_{K_1 K_2 K_3 K_4} \; \delta_{NM} \, (C^a)^{K_4 K_3 M}_{I_1 I_2 I_3} \; \bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3 | a)$$

Wegen

$$\left(\mathbb{K}_{L_1 K_1} \delta_{L_2 K_2} \delta_{L_3 K_3} + \delta_{L_1 K_1} \mathbb{K}_{L_2 K_2} \delta_{L_3 K_3} + \delta_{L_1 K_1} \delta_{L_2 K_2} \mathbb{K}_{L_3 K_3} \right) (C^a)^{K_1 K_2 K_3}_{I_1 I_2 I_3}$$

$$= \; 3 \, (C^a)^{L_1 L_2 L_3}_{M_1 M_2 M_3} \left(\delta_{M_1 K_1} \delta_{M_2 K_2} \mathbb{K}_{M_3 K_3} \right) (C^a)^{K_1 K_2 K_3}_{I_1 I_2 I_3} \tag{3.47}$$

ergibt sich schließlich

$$E \, (C^a)^{L_1 L_2 L_3}_{I_1 I_2 I_3} \; \bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3 | a) \tag{3.48}$$

$$= \; 3 (C^a)^{L_1 L_2 L_3}_{M_1 M_2 M_3} \left(\delta_{M_1 K_1} \delta_{M_2 K_2} \mathbb{K}_{M_3 K_3} \right) (C^a)^{K_1 K_2 K_3}_{I_1 I_2 I_3} \; \bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3 | a)$$

$$+ \; 6 \, (C^a)^{L_1 L_2 L_3}_{K_1 K_2 N} \; \mathbb{W}_{K_1 K_2 K_3 K_4} \; \delta_{NM} \, (C^a)^{K_4 K_3 M}_{I_1 I_2 I_3} \; \bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3 | a)$$

Die Gleichung (3.47) wird im Anschluß an (4.48) bewiesen.

Im folgenden Kapitel soll die Struktur von Gleichung (3.48) unter besonderer Berücksichtigung der Hilfsfeldsymmetrien weiter untersucht werden.

Kapitel 4: Auswertung der Hilfsfelder

Um die Hilfsfeldeigenschaften von Gleichung (3.48) explizit darzustellen, müssen wir gemäß (3.1) den Sammelindex I zerlegen in den Hilfsfeldindex i und einen Restindex a=(α,Γ;x). Die Zerlegung der Operatoren $K_{I_1I_2}$ und $W_{K_1K_2K_3K_4}$ in Hilfsfeldindex und Restindizes ist in Gleichung (3.26) bzw. (3.38) gegeben:

$$K_{I_1I_2} = \left(\mathcal{D}_{a_1a_2} \otimes \delta_{i_1i_2} + \mathcal{M}_{a_1a_2} \otimes \sigma^1_{i_1i_2} \right) \tag{4.1}$$

$$W_{K_1k_2k_3k_4} = W^+_{b_1b_2b_3b_4} \otimes \delta_{\substack{k_1k_2k_3k_4 \\ 2\,1\,1\,1}} + W^-_{b_1b_2b_3b_4} \otimes \delta_{\substack{k_1k_2k_3k_4 \\ 2\,2\,1\,1}} \tag{4.2}$$

Die Zerlegung des Operators C^a wurde bisher noch nicht diskutiert. Dazu benötigen wir einige Eigenschaften der Gruppe S(3), die in Abschnitt 4.1 zusammengestellt sind. Es zeigt sich, daß sich der Operator C^a in Anteile mit definierter Symmetrie bezüglich der Gruppe S(3) zerlegen läßt.

In Abschnitt 4.2 führen wir das am Beispiel des Zweiteilchenproblems anhand der Gruppe S(2) vor, da dieser Fall überschaubarer ist.

Im Zweiteilchenfall ebenso wie im Dreiteilchenfall (Abschnitt 4.3) zeigt sich jedoch, daß die Gleichungen in den Unterräumen zu den irreduziblen Darstellungen der S(2) bzw. S(3) nicht entkoppeln; die Gleichung (3.48) vermischt also Funktionen, die zu verschiedenen irreduziblen Darstellungen der S(3) gehören.

Im Dreiteilchenfall stellt (3.48) bezüglich der Hilfsfelder acht Gleichungen für acht Unbekannte

$$\bar{\varphi}(I_1I_2I_3|a) = \bar{\varphi}\left(\begin{matrix} i_1i_2i_3 \\ a_1a_2a_3 \end{matrix}|a\right) \tag{4.3}$$

dar. Gemäß der Definition der Hilfsfelder in Kapitel 1 können die Indizes (i_1,i_2,i_3) die Werte 1 oder 2 annehmen. Von diesen acht Funktionen ist nur $\bar{\varphi}(\begin{smallmatrix} 1\,1\,1 \\ a_1a_2a_3 \end{smallmatrix}|a)$ physikalisch, denn gemäß (3.10), (3.11) und (3.16) gilt

$$\bar{\varphi}\left(\begin{smallmatrix}\hat{1}\,\hat{1}\,\hat{1}\\ a_1 a_2 a_3\end{smallmatrix}|a\right) = u_{1k_1} u_{1k_2} u_{1k_3} \varphi\left(\begin{smallmatrix}k_1 k_2 k_3\\ a_1 a_2 a_3\end{smallmatrix}|a\right) \tag{4.4}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k_1 k_2 k_3 = 1}^{2} \varphi\left(\begin{smallmatrix}k_1 k_2 k_3\\ a_1 a_2 a_3\end{smallmatrix}|a\right)$$

Nur in dieser Funktion wird über alle Hilfsfelder summiert. Aufgrund der Definition der Hilfsfelder in (1.4) ergibt nämlich gerade die Summation

$$\psi_a = \sum_{i=1}^{2} \psi_a^i \tag{4.5}$$

die ursprünglichen physikalischen Felder.

Im Zweiteilchenfall konnten Hailer [19] und Hornung [20] zeigen, daß beim Übergang zum Schwerpunktsystem die Gleichungen im Unterraum der (in den Hilfsfeldern) symmetrischen Funktionen von dem der antisymmetrischen Funktionen entkoppeln, obwohl dies außerhalb des Schwerpunktes nicht der Fall ist. Weiter konnten sie zeigen, daß sich diese Gleichungen der (in den Hilfsfeldern) symmetrischen Funktionen in eine äquivalente Gleichung für die physikalische Funktion $\bar{\varphi}\left(\begin{smallmatrix}1\,1\\ a_1 a_2\end{smallmatrix}|a\right)$ auflösen lassen. Daraus folgt aber, daß die physikalische Information, welche die Bindungszustände betrifft, nur in den symmetrischen Funktionen liegt.

Diese Erkenntnis aus dem Zweiteilchensystem wenden wir nun auf das Dreiteilchensystem an. Auch dort sind die Unterräume gekoppelt. Wir betrachten daher näherungsweise nur den Unterraum der symmetrischen Funktionen (Abschnitt 4.3) und zeigen dann, daß sich für diesen Unterraum ebenfalls eine äquivalente Gleichung für die physikalische Funktion $\bar{\varphi}\left(\begin{smallmatrix}1\,1\,1\\ a_1 a_2 a_3\end{smallmatrix}|a\right)$ ableiten läßt (Abschnitt 4.4).

Analoge Überlegungen für die Linkslösungen führen zur Definition des Skalarproduktes (Abschnitt 4.5).

1. Darstellungen der S(3)

Die kurze Einführung in die Darstellungen der S(n) ist in Anlehnung an Biedenharn [31] entstanden, während dem überwiegenden Teil dieses Abschnittes die Arbeiten von Kramer [32,33] zugrundeliegen.

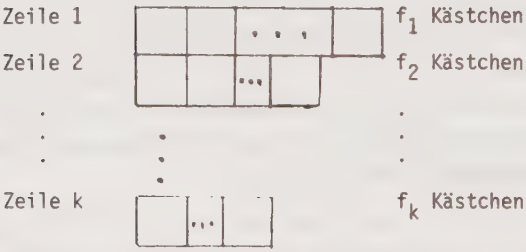
Die irreduziblen Darstellungen der S(n) sind durch die Zahl der Partitionen von n charakterisierbar:

$$f = [f_1, f_2, \cdots, f_k] \tag{4.6}$$

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = n$$

$$f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_k > 0$$

Jede solche Partition f definiert ein Youngdiagramm



(4.7)

Daher kann eine irreduzible Darstellung der S(n) auch durch D^f bezeichnet werden. Die Menge aller irreduziblen Darstellungen der S(n) ist gegeben durch

$$\{ D^f , \quad f \text{ Partition von } n \} \tag{4.8}$$

Angenommen, V^f sei ein linearer Vektorraum, der eine irreduzible Darstellung der S(n) trägt. Die Basisvektoren von V^f lassen sich dann charakterisieren durch die Youngtableaus, die zu dem Youngdiagramm von f gehören. Ein Youngtableau erhält man, indem man in die n Kästchen eines Youngdiagramms die Zahlen 1,...,n einfüllt. Dabei ist zu beachten, daß jede Zahl nur einmal vorkommt und daß die Zahlen steigen müssen, wenn man in (4.7) von links nach rechts und von oben nach unten fortschreitet.

Ein solches Youngtableau ist charakterisierbar durch das Yamanouchisymbol $r=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. α_j ist dabei die Zeilennummer, in welcher die Ziffer $j \in\{1,\ldots,n\}$ steht.

Eine Basis von V^f kann daher durch das Paar (f,r) charakterisiert werden. Die Anzahl der möglichen r entspricht dann der Dimension von f.

Jede Permutation $g \in S(n)$ definiert eine Abbildung von V^f auf sich selbst:

$$g : V^f \longrightarrow V^f \tag{4.9}$$

$$(f,r) \longrightarrow \sum_{r'} D^f_{r',r}(g)\,(f,r')$$

Für die S(3) bedeutet dies folgendes:

Es gibt drei Partitionen und daher drei irreduzible Darstellungen der S(3):

$\hat{=}$ [3] = s

$\hat{=}$ [2,1] = γ (4.10)

$\hat{=}$ [1,1,1] = a

Die irreduziblen Darstellungen a und s sind eindimensional. Die irreduzible Darstellung γ ist zweidimensional:

$\hat{=}$ $r_1 = (211)$, $(-)^{r_1} = +1$ (4.11)

$\hat{=}$ $r_2 = (121)$, $(-)^{r_2} = -1$

wobei die Phase eines Tableaus r_i gegeben ist durch

$$(-)^r = \prod_{s<t} \varepsilon_{st}$$

mit

$$\varepsilon_{st} = \begin{cases} +1 & r_s \leq r_t \\ -1 & r_s > r_t \end{cases} \tag{4.12}$$

Für unsere Anwendung ist nun der Raum der Dreiteilchenfunktionen wesentlich:

$$\bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3 | a) \tag{4.13}$$

Im allgemeinen ist dies bezüglich der Permutation ein sechsdimensionaler Raum. Die Funktionen

$$P(g)^{\,L_1 L_2 L_3}_{\,I_1 I_2 I_3}\ \bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3 | a) \qquad \forall g \in S(3) \tag{4.14}$$

spannen eine Darstellung der S(3) auf. Die Transpositionen P(g) vertauschen die Indizes. So ist z.B.

$$P(12)^{\,L_1 L_2 L_3}_{\,I_1 I_2 I_3} = \delta_{L_1 I_2}\,\delta_{L_2 I_1}\,\delta_{L_3 I_3} \tag{4.15}$$

Eine Basis zu einer irreduziblen Darstellung f der S(3) ist dann gegeben durch

$$\bar{\varphi}^f_r := \bar{\varphi}^f_r(I_1 I_2 I_3 | a) \tag{4.16}$$

Der Zusammenhang zwischen (4.14) und (4.16) wird durch die Youngoperatoren hergestellt

$$C^f_{mm'} := \frac{|f|}{n!} \sum_{g \in S(n)} D^f_{m'm}(g^{-1})\, P(g) \tag{4.17}$$

Aufgrund der Darstellungseigenschaften gilt:

$$\begin{aligned} P(q)\, C^f_{mm'} &= \frac{|f|}{n!} \sum_g D^f_{m'm}(g^{-1})\, P(q)\, P(g) \\ &= \frac{|f|}{n!} \sum_h D^f_{m'm}(h^{-1} q)\, P(h) \end{aligned} \tag{4.18}$$

Wegen

$$D^f_{m'm}(g^{-1}) = D^f_{m'm}(h^{-1}q) = \sum_{\bar{m}} D^f_{m'\bar{m}}(h^{-1}) D^f_{\bar{m}m}(q) \tag{4.19}$$

folgt

$$P(q)\, C^f_{mm'} = \sum_{\bar{m}} C^f_{\bar{m}m'}\, D^f_{\bar{m}m}(q) \tag{4.20}$$

Mit

$$\bar{\varphi}^f_r(r') = C^f_{rr'}\,\bar{\varphi}$$

folgt dann

$$P(q)\,\bar{\varphi}^f_r(r') = \sum_s D^f_{sr}(q)\,\bar{\varphi}^f_s(r') \tag{4.21}$$

Genau dies ist die Eigenschaft einer Basis der irreduziblen Darstellung f von S(n), r' ist dabei ein freier Parameter.

Die Darstellungsmatrizen $D^f_{rs}(g)$ der S(n) lassen sich aus denen der Untergruppen konstruieren [32]. Für die S(3) ergeben sich folgende Verhältnisse [32]:

$D^f_{rs}(g)$ \ g	e	(12)	(13)	(23)	(13)(12)	(12)(13)
$D^S_{11}(g)$	1	1	1	1	1	1
$D^a_{11}(g)$	1	-1	-1	-1	1	1
$D^\gamma_{11}(g)$	1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$D^\gamma_{12}(g)$	0	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$D^\gamma_{21}(g)$	0	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$D^\gamma_{22}(g)$	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

(4.22)

Die Youngoperatoren haben folgende Eigenschaften:

$$C^{f}_{mm'} \; C^{\bar{f}}_{\bar{m}'\bar{m}} = C^{f}_{m\bar{m}} \; \delta(f,\bar{f}) \; \delta(m',\bar{m}') \tag{4.23}$$

$$\left[C^{f}_{mm'}\right]^{+} = C^{f}_{m'm} \tag{4.24}$$

Daraus folgt, daß C^{f}_{mm} Projektionsoperatoren sind.

Ebenso wie wir Basisfunktionen zu den irreduziblen Darstellungen der S(3) konstruiert haben, können wir auch Operatoren definieren, welche zu irreduziblen Darstellungen f der S(n) gehören. Sei A ein Operator auf dem Raum der Funktionen (4.13), so ist A^{f}_{rs} ein Operator zur irreduziblen Darstellung f:

$$A^{f}_{rs} := \frac{|f|}{n!} \sum_{g} D^{f}_{sr}(g^{-1}) \; P(g) \, A \, P(g^{-1}) \tag{4.25}$$

Sind von den drei Indizes in (4.13) zwei gleich, wie wir es im Fall der Hilfsfeldindizes haben (vergleiche den nächsten Abschnitt)

$$\bar{\varphi}\left(\begin{matrix} i & i & k \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix} \middle| a\right) \tag{4.26}$$

so bilden diese Funktionen bereits die Basis der Darstellung der Untergruppe S(2) von S(3). Dies läßt sich am einfachsten sehen, wenn man die Youngoperatoren in geeigneter Weise faktorisiert. Aufgrund der Definition (4.17) und der Tabelle (4.22) ergibt sich:

$$C^{s}_{11} = 1/3 \left(e + P_{13} + P_{23}\right) \cdot 1/2 \left(e + P_{12}\right) \tag{4.27}$$

$$C^{a}_{11} = 1/3 \left(e - P_{13} - P_{23}\right) \cdot 1/2 \left(e - P_{12}\right) \tag{4.28}$$

$$C^{\delta}_{11} = 1/3 \left(2e + P_{13} + P_{23}\right) \cdot 1/2 \left(e - P_{12}\right) \tag{4.29}$$

$$C^{\delta}_{21} = \sqrt{3}/3 \left(-P_{13} + P_{23}\right) \cdot 1/2 \left(e - P_{12}\right) \tag{4.30}$$

$$C^{\gamma}_{12} = \sqrt{3}/3 \left(- P_{13} + P_{23} \right) \cdot 1/2 \left(e + P_{12} \right) \tag{4.31}$$

$$C^{\gamma}_{22} = 1/3 \left(2e - P_{13} - P_{23} \right) 1/2 \left(e + P_{12} \right) \tag{4.32}$$

Wendet man (4.27) - (4.32) auf (4.26) an, so verschwinden (4.28), (4.29) und (4.30) identisch. Basiselemente sind daher

$$\varphi^{s} \begin{pmatrix} i\,i\,k \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} a) \quad , \quad \varphi^{\gamma}_{2} \begin{pmatrix} i\,i\,k \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} a) \quad , \quad \varphi^{\gamma}_{1} \begin{pmatrix} i\,i\,k \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} a) \tag{4.33}$$

Wie wir aus (3.48) sehen, haben die Operatoren des kinematischen Teils eine spezielle Struktur:

$$\left(\delta\delta \mathcal{K} \right)^{L_1 L_2 L_3}_{I_1 I_2 I_3} = \delta_{L_1 I_1} \delta_{L_2 I_2} \mathcal{K}_{L_3 I_3} \tag{4.34}$$

Analog zu den Funktionen φ^{iik} vereinfachen sich auch hier die Verhältnisse. Aus (4.25) folgt allgemein:

$$\left(\delta\delta\mathcal{D} \right)^{f}_{rs} = \frac{|f|}{6} \sum_{g} D^{f}_{sr} \left(g^{-1} \right) P(g) \left(\delta\delta\mathcal{D} \right) P^{-1}(g) \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} \left(\delta\delta\mathcal{D} \right)^{s} &= 1/6 \left(\delta\delta\mathcal{D} + \delta\delta\mathcal{D} + \mathcal{D}\delta\delta + \delta\mathcal{D}\delta + \mathcal{D}\delta\delta + \delta\mathcal{D}\delta \right) \\ &= 1/3 \left(\delta\delta\mathcal{D} + \delta\mathcal{D}\delta + \mathcal{D}\delta\delta \right) \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned} \left(\delta\delta\mathcal{D} \right)^{a} &= 1/3 \left(\delta\delta\mathcal{D} - \delta\delta\mathcal{D} - \mathcal{D}\delta\delta - \delta\mathcal{D}\delta + \mathcal{D}\delta\delta + \delta\mathcal{D}\delta \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned} \left(\delta\delta\mathcal{D} \right)^{\gamma}_{11} &= 2/6 \left(\delta\delta\mathcal{D} - \delta\delta\mathcal{D} + 1/2\, \mathcal{D}\delta\delta + 1/2\, \delta\mathcal{D}\delta - 1/2\, \mathcal{D}\delta\delta - 1/2\, \delta\mathcal{D}\delta \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$(\delta\delta\mathcal{D})^{\gamma}_{22} = {}^{2}/_{6}\,(\delta\delta\mathcal{D} + \delta\delta\mathcal{D} - {}^{1}/_{2}\mathcal{D}\delta\delta - {}^{1}/_{2}\delta\mathcal{D}\delta - {}^{1}/_{2}\mathcal{D}\delta\delta - {}^{1}/_{2}\delta\mathcal{D}\delta)$$

$$= {}^{1}/_{3}\,(2\,\delta\delta\mathcal{D} - \mathcal{D}\delta\delta - \delta\mathcal{D}\delta) \tag{4.39}$$

$$(\delta\delta\mathcal{D})^{\gamma}_{12} = {}^{\sqrt{3}}/_{6}\,(-\mathcal{D}\delta\delta + \delta\mathcal{D}\delta - \mathcal{D}\delta\delta + \delta\mathcal{D}\delta)$$

$$= {}^{\sqrt{3}}/_{3}\,(\delta\mathcal{D}\delta - \mathcal{D}\delta\delta) \tag{4.40}$$

$$(\delta\delta\mathcal{D})^{\gamma}_{21} = {}^{\sqrt{3}}/_{6}\,(-\mathcal{D}\delta\delta + \delta\mathcal{D}\delta + \mathcal{D}\delta\delta - \delta\mathcal{D}\delta)$$

$$= 0 \tag{4.41}$$

(4.37), (4.38) und (4.41) sind aufgrund der Struktur (4.34) bereits identisch Null; vergleiche dazu (4.27) - (4.32).

Entsprechend der Indexzerlegung in

$$I = (a, i)$$

suchen wir auch eine Zerlegung des Operators C^a in Gl. (3.48) bezüglich des Hilfsfeldraums und des Raums der Restindizes. Dies entspricht einer Kroneckerzerlegung. Für diese Zerlegung von C^a gilt folgender Satz [32]:

Seien $f \in \{a,s,\gamma\}$ die irreduziblen Darstellungen der S(3); sei $\tilde{f} = [111] \times f$ die assoziierte Darstellung. (Diese erhält man, indem man die Youngdiagramme an der zweiten Winkelhalbierenden spiegelt.) Dann gilt:

Die alternierende Darstellung [111] läßt sich genau einmal aus dem Kroneckerprodukt von f und $\tilde{f}$ reduzieren:

$$[111] = [f] \times [\tilde{f}] \tag{4.42}$$

Für die Kroneckerzerlegung von (C^a) bedeutet das [40]:

$$(C^a)^{I_1 I_2 I_3}_{k_1 k_2 k_3} = \sum_f |f|^{-1} \sum_{r,r'} \left(C^{f}_{rr'}\right)^{a_1 a_2 a_3}_{b_1 b_2 b_3} \otimes \left(C^{\tilde{f}}_{\tilde{r}\tilde{r}'}\right)^{i_1 i_2 i_3}_{k_1 k_2 k_3} (-)^{\tilde{r}} (-)^{\tilde{r}'} \tag{4.43}$$

Dabei sind $(-)^{\tilde{r}}$ und $(-)^{\tilde{r}'}$ die Phasen gemäß (4.12).

Diese Zerlegung gilt für alle $f \in \{s,a,\gamma\}$. Die allgemeinste Zerlegung von C^a bezüglich der S(3) ist daher

$$C^a = C^a \otimes C^s + C^s \otimes C^a \tag{4.44}$$

$$+ 2^{-1} \left[C^\gamma_{22} \otimes C^\gamma_{11} + C^\gamma_{11} \otimes C^\gamma_{22} - C^\gamma_{12} \otimes C^\gamma_{21} - C^\gamma_{21} \otimes C^\gamma_{12} \right]$$

Die Indizes lassen wir hier weg. Die Operatoren hinter dem $\otimes$-Produkt beziehen sich auf den Hilfsfeldraum, diejenigen davor auf den Raum der Restindizes.

Folgende Eigenschaften sind für die weitere Rechnung nützlich:

Satz 1:

$$C^a P(g) = D^a(g) C^a \tag{4.45}$$

Beweis: Mit

$$C^a = (n!)^{-1} \sum_h D^a(h^{-1}) P(h)$$

(vergleiche dazu (4.27), (4.30), (4.35)) gilt:

$$C^a P(g) = (n!)^{-1} \sum_h D^a(h^{-1}) P(h) P(g)$$

$$= (n!)^{-1} \sum_h D^a(h^{-1}) P(hg)$$

Dabei haben wir ausgenützt, daß P(h) eine Darstellung der S(n) ist; ebenfalls eine (1-dim) Darstellung ist $D^a(h)$. Mit $f := hg$ gilt

$$C^a P(g) = (n!)^{-1} \sum_f D^a(gf^{-1}) P(f)$$

$$= D^a(g) C^a$$

Satz 2:

$$C^a \, O^f_{rs} \, C^a = \begin{cases} 0 & \text{für } f = (a,\gamma) \\ C^a \mathbin{\mathcal{O}} C^a & \text{für } f = s \end{cases} \tag{4.46}$$

wobei O^f_{rs} für $f \in \{a,s,\gamma\}$ durch (4.25) gegeben sind.

Beweis: Mit (4.25), (4.17) gilt

$$\begin{aligned} C^a \, O^f_{rs} \, C^a &= (n!)^{-1} \sum_g D^f_{sr}(g^{-1}) \, C^a \big(P(g) \mathbin{\mathcal{O}} P^{-1}(g) \big) C^a \\ &= (n!)^{-1} \sum_g D^f_{sr}(g^{-1}) \, D^a(g) D^a(g^{-1}) \, \big(C^a \mathbin{\mathcal{O}} C^a \big) \\ &= \Big((n!)^{-1} \sum_g D^f_{sr}(g^{-1}) \Big) \big(C^a \mathbin{\mathcal{O}} C^a \big) \end{aligned}$$

Aus (4.22) folgt die Behauptung.

Satz 3:

$$O^s C^a = C^a O^s \tag{4.47}$$

Beweis: Mit (4.45) und (4.46) folgt

$$\begin{aligned} & O^s C^a - C^a O^s \\ &= (n!)^{-1} \sum_g D^s(g^{-1}) \big(P(g) \mathbin{\mathcal{O}} P^{-1}(g) \, C^a - C^a \, P(g) \mathbin{\mathcal{O}} P^{-1}(g) \big) \\ &= (n!)^{-1} \sum_g \big(D^a(g^{-1}) P(g) \mathbin{\mathcal{O}} C^a - C^a \mathbin{\mathcal{O}} P(g^{-1}) D^a(g) \big) \\ &= C^a \mathbin{\mathcal{O}} C^a - C^a \mathbin{\mathcal{O}} C^a = 0 \end{aligned}$$

Satz 4:

$$3\, C^{a}\,(\delta\delta K)\, C^{a} \;=\; (K\delta\delta + \delta K\delta + \delta\delta K)\, C^{a} \tag{4.48}$$

(vergleiche dazu (3.47)).

Beweis: Bilde bezüglich der S(3)

$$(\delta\delta K)^{S} \;=\; \tfrac{1}{6}\sum_{g} D^{S}(g^{-1})\, P(g)\,(\delta\delta K)\, P^{-1}(g)$$

$$= \tfrac{1}{6}(\delta\delta K + \delta\delta K + K\delta\delta + \delta K\delta + K\delta\delta + \delta K\delta)$$

$$= \tfrac{1}{3}(\delta\delta K + \delta K\delta + K\delta\delta)$$

Mit Satz 2 und Satz 3 folgt die Behauptung.

2. Zweiteilchensektor

Um die Reduktionstechnik beispielhaft darzustellen, betrachten wir zuerst den einfacheren Zweiteilchensektor. Dieser wurde von Hailer [19] und Hornung [20] untersucht. Hier wollen wir zeigen, wie sich deren Resultate mit der Reproduktionstechnik reproduzieren lassen.

Aus (2.41) folgt für n=2

$$E\,|F_2[j,a]\rangle \;=\; K\,|F_2[j,a]\rangle \;+\; P\,|F_2[j,a]\rangle \tag{4.49}$$

wobei K und P durch (3.27) und (3.39) gegeben sind, während

$$|F_2[j,a]\rangle \;=\; -\tfrac{1}{2}\,\bar{\varphi}(I_1 I_2 | a)\;\bar{j}_{I_1}\,\bar{j}_{I_2}\,|0\rangle_F \tag{4.50}$$

ist. Setzt man in (4.49) K gemäß (3.27) und P gemäß (3.39) ein und projiziert analog zum Dreiteilchensystem mit

$$_F\langle 0|\,\bar{\partial}_{L_2}\,\bar{\partial}_{L_1} \tag{4.51}$$

so erhält man ein Eigenwertgleichungssystem für die Funktionen

$$\bar{\varphi}(I_1 I_2 | a) \tag{4.52}$$

analog zu (3.48):

$$\begin{aligned} & E\,(C^a)^{L_1 L_2}_{I_1 I_2}\ \bar{\varphi}(I_1 I_2 | a) \\ &= (C^a)^{L_1 L_2}_{M_1 M_2}\ (\delta_{M_1 K_1}\, \mathbb{K}_{M_2 K_2})\, (C^a)^{K_1 K_2}_{I_1 I_2}\ \bar{\varphi}(I_1 I_2 | a) \\ &+ \lambda\,(C^a)^{L_1 L_2}_{K_1 K_2}\ \mathbb{W}_{K_1 K_2 K_3 K_4}\,(C^a)^{K_4 K_3}_{I_1 I_2}\ \bar{\varphi}(I_1 I_2 | a) \end{aligned} \tag{4.53}$$

Um die Eigenschaften der Hilfsfelder explizit darzustellen, zerlegen wir nun den Superindex in Hilfsfeldindex und Restindex:

$$I = (a, i)\,; \quad K = (b, k)\,; \quad L = (c, \ell)\,; \quad M = (d, m) \tag{4.54}$$

Die zugehörigen Zerlegungen von $\mathbb{K}$, $\mathbb{W}$ und $\bar{\varphi}$ ergeben sich aus (4.1) - (4.3). Die Zerlegung von C^a bezüglich der S(2) ergibt:

$$(C^a)^{L_1 L_2}_{I_1 I_2} = (C^a)^{c_1 c_2}_{a_1 a_2} \otimes (C^s)^{\ell_1 \ell_2}_{i_1 i_2} + (C^s)^{c_1 c_2}_{a_1 a_2} \otimes (C^a)^{\ell_1 \ell_2}_{i_1 i_2} \tag{4.55}$$

Im weiteren lassen wir die Indizes weg. Hinter dem Produktzeichen stehen die Operatoren bezüglich der Hilfsfelder, davor jene Operatoren, die sich auf den Restindex beziehen.

Setzt man in (4.53) die Zerlegung (4.55) von C^a ein, so zerfällt (4.53) in zwei Gleichungen für die orthogonalen Unterräume, die durch $C^a \otimes C^s$ und $C^s \otimes C^a$ charakterisiert werden:

$$\text{I} \quad E\, C^a \otimes C^s \bar{\varphi} \tag{4.56}$$

$$= C^a \otimes C^s \left(\delta\mathcal{D} \otimes \delta\delta + \delta\mathcal{M} \otimes \sigma^1 \delta \right) \left(C^a \otimes C^s + C^s \otimes C^a \right) \bar{\varphi}$$

$$+ 2\, C^a \otimes C^s \left(W^+ \otimes \delta_{2111} + W^- \otimes \delta_{2211} \right) \left(C^a \otimes C^s + C^s \otimes C^a \right) \bar{\varphi}$$

$$\text{II} \quad E\, C^s \otimes C^a \bar{\varphi} \tag{4.57}$$

$$= C^s \otimes C^a \left(\delta\mathcal{D} \otimes \delta\delta + \delta\mathcal{M} \otimes \sigma^1 \delta \right) \left(C^a \otimes C^s + C^s \otimes C^a \right) \bar{\varphi}$$

$$+ 2\, C^s \otimes C^a \left(W^+ \otimes \delta_{2111} + W^- \otimes \delta_{2211} \right) \left(C^a \otimes C^s + C^s \otimes C^a \right) \bar{\varphi}$$

wobei zur Abkürzung

$$\delta_{2111} := \underset{2\ 1\ 1\ 1}{\delta_{k_1 k_2 k_3 k_4}} = \delta_{k_1 2}\, \delta_{k_2 1}\, \delta_{k_3 1}\, \delta_{k_4 1} \tag{4.58}$$

gesetzt wurde.

Aus (4.25) folgt für die S(2)

$$(\delta\mathcal{D})^s_a = \tfrac{1}{2} \left(\delta\mathcal{D} \pm \mathcal{D}\delta \right) = \pm \tfrac{1}{2} \left(\mathcal{D}\delta \right)^s_a \tag{4.59}$$

und

$$C^a (\mathcal{D}\delta) C^a = C^a (\mathcal{D}\delta)^s = (\mathcal{D}\delta)^s C^a \tag{4.60}$$

$$C^s (\mathcal{D}\delta) C^s = C^s (\mathcal{D}\delta)^s = (\mathcal{D}\delta)^s C^s \tag{4.61}$$

$$C^a(\mathcal{D}\delta)\,C^s \;=\; C^a(\mathcal{D}\delta)^a \;=\; (\mathcal{D}\delta)^a\,C^s \tag{4.62}$$

$$C^s(\mathcal{D}\delta)\,C^a \;=\; C^s(\mathcal{D}\delta)^a \;=\; (\mathcal{D}\delta)^a\,C^a \tag{4.63}$$

Damit lassen sich die Gleichungen (4.56) und (4.57) weiter auswerten:

$$\text{I}\qquad E\,C^a \otimes C^s\,\bar{\varphi} \tag{4.64}$$

$$= 2\Big((\delta\mathcal{D})^s C^a \otimes \delta\delta C^s + (\delta\mathcal{M})^s C^a \otimes (\delta\sigma^1)^s C^s$$

$$+ (\delta\mathcal{M})^a C^s \otimes (\delta\sigma^1)^a C^a \Big)\,\bar{\varphi}$$

$$+ 2\Big(C^a W^+ C^a \otimes C^s \delta_{2111} C^s + C^a W^- C^a \otimes C^s \delta_{2211} C^s \Big)\,\bar{\varphi}$$

$$\text{II}\qquad E\,C^s \otimes C^a\,\bar{\varphi} \tag{4.65}$$

$$= 2\Big((\delta\mathcal{D})^s C^s \otimes \delta\delta C^a + (\delta\mathcal{M})^s C^s \otimes (\delta\sigma^1)^s C^a$$

$$+ (\delta\mathcal{M})^a C^a \otimes (\delta\sigma^1)^a C^s \Big)\,\bar{\varphi}$$

$$+ 2\Big(C^s W^+ C^a \otimes C^a \delta_{2111} C^s \Big)\,\bar{\varphi}$$

Hierbei ist zum Beispiel

$$C^a\,\delta_{2111}\,C^s\,\bar{\varphi} \;=\; (C^a)_{\substack{\ell_1\ell_2\\ k_1k_2}}\,\delta_{\substack{k_1k_2k_3k_4\\ 2\,1\,1\,1}}\,(C^s)_{\substack{k_3k_4\\ i_1i_2}}\,\bar{\varphi}\binom{i_1\,i_2}{a_1a_2}(a)$$

$$= (C^a)_{\substack{\ell_1\ell_2\\ 2\,1}}\,(C^s)_{\substack{1\,1\\ i_1i_2}}\,\bar{\varphi}\binom{i_1\,i_2}{a_1a_2}(a) \tag{4.66}$$

$$= (C^a)_{\substack{\ell_1\ell_2\\ 2\,1}}\,\bar{\varphi}\binom{1\,1}{a_1a_2}(a)$$

Das bedeutet, daß dieser Anteil der Wechselwirkung in den Hilfsfeldern an das Feld mit $i_1=i_2=1$ koppelt, wenn das freie Indexpaar (ℓ_1,ℓ_2) die Werte (1,2) oder (2,1) annimmt.

Setzen wir nun der Reihe nach die vier möglichen Werte von (ℓ_1,ℓ_2) ein [(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)], und benutzen wir zur Abkürzung

$$\bar{\varphi}^{s}_{a} := \tfrac{1}{2}\left(\bar{\varphi}^{12} \pm \bar{\varphi}^{21}\right) \tag{4.67}$$

so ergeben sich folgende Gleichungen:

I (4.68)

$$E\,C^a\,\bar{\varphi}^{11} = 2\left((\delta\mathfrak{D})^s C^a\,\bar{\varphi}^{11} + (\delta\mathfrak{M})^s C^a\,\bar{\varphi}^{s} - (\delta\mathfrak{M})^a C^s\,\bar{\varphi}^{a}\right)$$

(4.69)

$$E\,C^a\,\bar{\varphi}^{s} = 2\left((\delta\mathfrak{D})^s C^a\,\bar{\varphi}^{s} + (\delta\mathfrak{M})^s C^a\cdot\tfrac{1}{2}\left(\bar{\varphi}^{11}+\bar{\varphi}^{22}\right)\right) + 2\,C^a W^+ C^a\,\bar{\varphi}^{11}$$

(4.70)

$$E\,C^a\,\bar{\varphi}^{22} = 2\left((\delta\mathfrak{D})^s C^a\,\bar{\varphi}^{22} + (\delta\mathfrak{M})^s C^a\,\bar{\varphi}^{s} + (\delta\mathfrak{M})^a C^s\,\bar{\varphi}^{a}\right) + 2\,C^a W^- C^a\,\bar{\varphi}^{11}$$

II $\quad 0 = 0$ (4.71)

$$E\,C^s\,\bar{\varphi}^{a} = 2\left((\delta\mathfrak{D})^s C^s\,\bar{\varphi}^{a} + (\delta\mathfrak{M})^a C^a\cdot\tfrac{1}{2}\left(\bar{\varphi}^{22}-\bar{\varphi}^{11}\right)\right) - 2\,C^s W^+ C^a\,\bar{\varphi}^{11}$$

$$0 = 0$$

Da die Hilfsfeldeigenschaften voll ausgewertet sind, erscheinen in (4.68) - (4.71) keine direkten Produkte mehr. Die verbliebenen Operatoren wirken auf die Restindizes; lediglich die Bezeichnungen an den Zweiteilchenfunktionen weisen Hilfsfeldcharakter auf.

Die Gleichungen (4.68) - (4.70) beziehen sich auf den (in den Hilfsfeldern!) symmetrischen Sektor, die Gl. (4.71) auf den antisymmetrischen Sektor. Dabei sieht man, daß Gl. (4.68) und (4.70) des symmetrischen Sektors an das antisymmetrische $\bar{\varphi}^{a}$ koppeln, umgekehrt koppelt (4.71) an die symmetrischen $\bar{\varphi}^{11}$ und $\bar{\varphi}^{22}$.

Nun konnten Hailer [19] und Hornung [20] zeigen, daß beim Übergang zum Schwerpunktsystem die Operatoren $(\delta M)^a$ identisch verschwinden. Dies bedeutet eine Entkopplung des (in den Hilfsfeldern) symmetrischen Sektors I vom antisymmetrischen Sektor II . Dagegen bleibt der Sektor II an den Sektor I aufgrund des Wechselwirkungsterms gekoppelt.

Die Berechnung des Eigenwertes E eines Zweiteilchenbindungszustandes reduziert sich damit auf das Lösen der drei Gleichungen des Sektors I für die drei Unbekannten φ^{11}, φ^{22} und φ^s:

I

$$\left(E\delta\delta - 2(\delta\mathcal{D})^s\right) C^a \bar{\varphi}^{11} = 2(\delta M)^s C^a \bar{\varphi}^s \tag{4.72}$$

$$\left(E\delta\delta - 2(\delta\mathcal{D})^s\right) C^a \bar{\varphi}^s = 2(\delta M)^s C^a \tfrac{1}{2}(\bar{\varphi}^{11} + \bar{\varphi}^{22}) + 2 C^a W^+ C^a \bar{\varphi}^{11} \tag{4.73}$$

$$\left(E\delta\delta - 2(\delta\mathcal{D})^s\right) C^a \bar{\varphi}^{22} = 2(\delta M)^s C^a \bar{\varphi}^s + 2 C^a W^- C^a \bar{\varphi}^{11} \tag{4.74}$$

Das Einsetzen einer Lösung $\bar{\varphi}^{11}$ dieser Gleichungen in

$$\text{II}\quad \left(E\delta\delta - 2(\delta\mathcal{D})^s\right) C^s \bar{\varphi}^a = -2 C^s W^+ C^a \bar{\varphi}^{11} \tag{4.75}$$

ergibt schließlich φ^a.

Dies bedeutet aber, daß die physikalische Information des Bindungsproblems im symmetrischen Sektor I liegt. Im Nachhinein kann man die relevanten Gleichungen (4.72) - (4.74) mathematisch auf folgende Weise erhalten:

Fordert man sofort $\varphi^a \equiv 0$, d.h. schränkt man die Entwicklung des Operators C^a, wie sie in (4.55) dargestellt ist, ein auf

$$\left(C^a\right)^{L_1 L_2}_{I_1 I_2} \bar{\varphi}(I_1 I_2 | a) = \left(C^a\right)^{c_1 c_2}_{a_1 a_2} \otimes \left(C^s\right)^{\ell_1 \ell_2}_{i_1 i_2} \bar{\varphi}\left(\begin{smallmatrix} i_1 i_2 \\ a_1 a_2 \end{smallmatrix} | a\right) \tag{4.76}$$

so erhalten wir aus (4.53) gerade diejenigen Gleichungen (4.72) - (4.74), welche das physikalische Problem festlegen.

3. Näherungsweise Entkopplung bei drei Teilchen

Ausgangspunkt ist die Dreiteilchengleichung (3.48)

$$E\,(C^a)^{L_1L_2L_3}_{I_1I_2I_3}\;\bar{\varphi}(I_1I_2I_3|a)$$

$$= 3\,(C^a)^{L_1L_2L_3}_{M_1M_2M_3}\left(\delta_{L_1K_1}\delta_{L_2K_2}\mathbb{K}_{L_3K_3}\right)(C^a)^{K_1K_2K_3}_{I_1I_2I_3}\;\bar{\varphi}(I_1I_2I_3|a) \qquad (4.77)$$

$$+\;6\,(C^a)^{L_1L_2L_3}_{K_1K_2N}\;W_{K_1K_2K_3K_4}\,\delta_{NM}\,(C^a)^{K_4K_3M}_{I_1I_2I_3}\;\bar{\varphi}(I_1I_2I_3|a)$$

Um zunächst einen Überblick über die möglichen Hilfsfeldkombinationen zu erhalten, ziehen wir den Operator C^a zu den Feldern, indem wir definieren:

$$\varphi^a(L_1L_2L_3|a) = (C^a)^{L_1L_2L_3}_{I_1I_2I_3}\;\bar{\varphi}(I_1I_2I_3|a)$$

Mit (3.47) erhalten wir aus (4.77)

$$E\,\varphi^a(I_1I_2I_3|a)$$

$$= \left(\delta\delta\mathbb{K}+\delta\mathbb{K}\delta+\mathbb{K}\delta\delta\right)^{I_1I_2I_3}_{K_1K_2K_3}\;\varphi^a(K_1K_2K_3|a) \qquad (4.78)$$

$$+\;6\,(C^a)^{I_1I_2I_3}_{K_1K_2N}\;W_{K_1K_2K_3K_4}\;\varphi^a(K_4K_3N|a)$$

Nun zerlegen wir die Indizes wir im Zweiteilchenfall:

$$I=(a,i)\;;\qquad K=(b,k)\;;\qquad L=(c,\ell)\;;\qquad M=(d,m) \qquad (4.54)$$

Damit ergibt sich aus (4.77):

$$E\,\omega^a\begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} = \frac{i}{\hbar}\Big(\mathcal{D}_{a_1 b_1}\delta_{a_2 b_2}\delta_{a_3 b_3} + \delta_{a_1 b_1}\mathcal{D}_{a_2 b_2}\delta_{a_3 b_3} + \delta_{a_1 b_1}\delta_{a_2 b_2}\mathcal{D}_{a_3 b_3}\Big)\cdot \delta_{i_1 k_1}\delta_{i_2 k_2}\delta_{i_3 k_3}$$

$$+ \mathcal{M}_{a_1 b_1}\delta_{a_2 b_2}\delta_{a_3 b_3}\cdot \sigma^{\wedge}_{i_1 k_1}\delta_{i_2 k_2}\delta_{i_3 k_3}$$

$$+ \delta_{a_1 b_1}\mathcal{M}_{a_2 b_2}\delta_{a_3 b_3}\cdot \delta_{i_1 k_1}\sigma^{\wedge}_{i_2 k_2}\delta_{i_3 k_3}$$

$$+ \delta_{a_1 b_1}\delta_{a_2 b_2}\mathcal{M}_{a_3 b_3}\cdot \delta_{i_1 k_1}\delta_{i_2 k_2}\sigma^{\wedge}_{i_3 k_3}\Big\}\ \varphi^a\begin{pmatrix} k_1 k_2 k_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{pmatrix}(a) \qquad (4.79)$$

$$+ \Big\{ \Big(W^+_{a_1 a_2 b_3 b_4}\,\underset{2\,1\,1\,1}{\delta_{i_1 i_2 k_3 k_4}} - W^+_{a_2 a_1 b_3 b_4}\,\underset{2\,1\,1\,1}{\delta_{i_2 i_1 k_3 k_4}}\Big)\varphi^a\begin{pmatrix} k_4 k_3 i_3 \\ b_4 b_3 a_3 \end{pmatrix}(a)$$

$$- \Big(W^+_{a_1 a_3 b_3 b_4}\,\underset{2\,1\,1\,1}{\delta_{i_1 i_3 k_3 k_4}} - W^+_{a_3 a_1 b_3 b_4}\,\underset{2\,1\,1\,1}{\delta_{i_3 i_1 k_3 k_4}}\Big)\varphi^a\begin{pmatrix} k_4 k_3 i_2 \\ b_4 b_3 a_2 \end{pmatrix}(a)$$

$$+ \Big(W^+_{a_2 a_3 b_3 b_4}\,\underset{2\,1\,1\,1}{\delta_{i_2 i_3 k_3 k_4}} - W^+_{a_3 a_2 b_3 b_4}\,\underset{2\,1\,1\,1}{\delta_{i_3 i_2 k_3 k_4}}\Big)\varphi^a\begin{pmatrix} k_4 k_3 i_1 \\ b_4 b_3 a_1 \end{pmatrix}(a)$$

$$+ \Big(W^-_{a_1 a_2 b_3 b_4} - W^-_{a_2 a_1 b_3 b_4}\Big)\,\underset{2\,2\,1\,1}{\delta_{i_1 i_2 k_3 k_4}}\ \varphi^a\begin{pmatrix} k_4 k_3 i_3 \\ b_4 b_3 a_3 \end{pmatrix}(a)$$

$$- \Big(W^-_{a_1 a_3 b_3 b_4} - W^-_{a_3 a_1 b_3 b_4}\Big)\,\underset{2\,2\,1\,1}{\delta_{i_1 i_3 k_3 k_4}}\ \varphi^a\begin{pmatrix} k_4 k_3 i_2 \\ b_4 b_3 a_2 \end{pmatrix}(a)$$

$$+ \Big(W^-_{a_2 a_3 b_3 b_4} - W_{a_3 a_2 b_3 b_4}\Big)\,\underset{2\,2\,1\,1}{\delta_{i_2 i_3 k_3 k_4}}\ \varphi^a\begin{pmatrix} k_4 k_3 i_1 \\ b_4 b_3 a_1 \end{pmatrix}(a)\Big\}$$

wobei wir den Wechselwirkungsterm umgeformt haben mit

(4.80)

$$6(C^2)^{I_1 I_2 I_3}_{K_1 K_2 N} = 2\left(\delta_{I_3 N}(C^a)^{I_2 I_3}_{K_1 K_2} - \delta_{I_2 N}(C^a)^{I_1 I_3}_{K_1 K_2} + \delta_{I_3 N}(C^a)^{I_1 I_2}_{K_1 K_2}\right)$$

Für die Operatoren haben wir (4.1) und (4.2) benutzt.

Der erste Term auf der rechten Seite von (4.79) ist diagonal in den Hilfsfeldern, ebenso wir der Term, der den Eigenwert enthält. Daher fassen wir beide zusammen und definieren

$$Z^{a_1 a_2 a_3}_{b_1 b_2 b_3} := E\,\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3} - \mathcal{D}^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3} - \delta^{a_1}_{b_1}\mathcal{D}^{a_2}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3} - \delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\mathcal{D}^{a_3}_{b_3} \quad (4.81)$$

Definieren wir weiter

$$\mathcal{M}^{1\,a_1 a_2 a_3}_{b_1 b_2 b_3} := M^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3}$$

$$\mathcal{M}^{2\,a_1 a_2 a_3}_{b_1 b_2 b_3} := \delta^{a_1}_{b_1} M^{a_2}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3} \quad (4.82)$$

$$\mathcal{M}^{3\,a_1 a_2 a_3}_{b_1 b_2 b_3} := \delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2} M^{a_3}_{b_3}$$

und setzen in (i_1,i_2,i_3) der Reihe nach alle Werte 1 oder 2 ein, so erhalten wir folgende acht Gleichungen:

$$Z^{a_1 a_2 a_3}_{b_1 b_2 b_3}\,\varphi^a(\overset{\uparrow}{b_1}\overset{\uparrow}{b_2}\overset{\uparrow}{b_3}|a) \quad (4.83)$$

$$= \mathcal{M}^{1\,a_1 a_2 a_3}_{b_1 b_2 b_3}\varphi^a(\overset{2}{b_1}\overset{\uparrow}{b_2}\overset{\uparrow}{b_3}|a) + \mathcal{M}^{2\,a_1 a_2 a_3}_{b_1 b_2 b_3}\varphi^a(\overset{1}{b_1}\overset{2}{b_2}\overset{1}{b_3}|a) + \mathcal{M}^{3\,a_1 a_2 a_3}_{b_1 b_2 b_3}\varphi^a(\overset{\uparrow}{b_1}\overset{\uparrow}{b_2}\overset{2}{b_3}|a)$$

$$Z^{a_1a_2a_3}_{b_1b_2b_3}\ \varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&\uparrow&2\\ b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right) \tag{4.84}$$

$$= M^1_{\substack{a_1a_2a_3\\ b_1b_2b_3}}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}2&\uparrow&2\\ b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right) + M^2_{\substack{a_1a_2a_3\\ b_1b_2b_3}}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&2&2\\ b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right) + M^3_{\substack{a_1a_2a_3\\ b_1b_2b_3}}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right)$$

$$+ \left\{ W^+_{a_3a_1b_3b_4}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ b_4&b_3&a_2\end{smallmatrix}|a\right) - W^+_{a_3a_2b_2b_4}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ b_4&b_3&a_1\end{smallmatrix}|a\right)\right\}$$

$$Z^{a_1a_2a_3}_{b_1b_2b_3}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&2&\uparrow\\ b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right) \tag{4.85}$$

$$= M^1_{\substack{a_1a_2a_3\\ b_1b_2b_3}}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}2&2&\uparrow\\ b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right) + M^2_{\substack{a_1a_2a_3\\ b_1b_2b_3}}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right) + M^3_{\substack{a_1a_2a_3\\ b_1b_2b_3}}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&2&2\\ b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right)$$

$$+ \left\{ -W^+_{a_2a_1b_3b_4}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ b_4&b_3&a_3\end{smallmatrix}|a\right) + W^+_{a_2a_3b_3b_4}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ b_4&b_3&a_1\end{smallmatrix}|a\right)\right\}$$

$$Z^{a_1a_2a_3}_{b_1b_2b_3}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}2&\uparrow&\uparrow\\ b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right) \tag{4.86}$$

$$= M^1_{\substack{a_1a_2a_3\\ b_1b_2b_3}}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right) + M^2_{\substack{a_1a_2a_3\\ b_1b_2b_3}}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}2&2&\uparrow\\ b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right) + M^3_{\substack{a_1a_2a_3\\ b_1b_2b_3}}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}2&\uparrow&2\\ b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right)$$

$$+ \left\{ W^+_{a_1a_2b_3b_4}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ b_4&b_3&a_3\end{smallmatrix}|a\right) - W^+_{a_1a_3b_3b_4}\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ b_4&b_3&a_2\end{smallmatrix}|a\right)\right\}$$

$$Z^{a_1a_2a_3}_{b_1b_2b_3}\,\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}2&2&1\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}\middle|a\right) \tag{4.87}$$

$$= \mathcal{M}^1_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&2&1\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}\middle|a\right) + \mathcal{M}^2_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}2&1&1\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}\middle|a\right) + \mathcal{M}^3_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}2&2&2\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}\middle|a\right)$$

$$+ \Big\{ -W^+_{a_1a_3b_3b_4}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\b_4&b_3&a_2\end{smallmatrix}\middle|a\right) + W^+_{a_2a_3b_3b_4}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\b_4&b_3&a_1\end{smallmatrix}\middle|a\right)$$

$$+ \left(W^-_{a_1a_2b_3b_4} - W^-_{a_2a_1b_3b_4}\right)\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\b_4&b_3&a_3\end{smallmatrix}\middle|a\right)\Big\}$$

$$Z^{a_1a_2a_3}_{b_1b_2b_3}\,\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}2&1&2\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}\middle|a\right) \tag{4.88}$$

$$= \mathcal{M}^1_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}\middle|a\right) + \mathcal{M}^2_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}2&2&2\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}\middle|a\right) + \mathcal{M}^3_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}2&1&1\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}\middle|a\right)$$

$$+ \Big\{ W^+_{a_1a_2b_3b_4}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\b_4&b_3&a_3\end{smallmatrix}\middle|a\right) - W^+_{a_3a_2b_3b_4}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\b_4&b_3&a_1\end{smallmatrix}\middle|a\right)$$

$$- \left(W^-_{a_1a_3b_3b_4} - W^-_{a_3a_1b_3b_4}\right)\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\b_4&b_3&a_2\end{smallmatrix}\middle|a\right)\Big\}$$

$$Z^{a_1a_2a_3}_{b_1b_2b_3}\,\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&2&2\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}\middle|a\right) \tag{4.89}$$

$$= \mathcal{M}^1_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}2&2&2\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}\middle|a\right) + \mathcal{M}^2_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}\middle|a\right) + \mathcal{M}^3_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&2&1\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}\middle|a\right)$$

$$+ \Big\{ -W^+_{a_2a_1b_3b_4}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\b_4&b_3&a_3\end{smallmatrix}\middle|a\right) + W^+_{a_3a_1b_3b_4}\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\b_4&b_3&a_2\end{smallmatrix}\middle|a\right)$$

$$+ \left(W^-_{a_2a_3b_3b_4} - W^-_{a_3a_2b_3b_4}\right)\varphi^a\!\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\b_4&b_3&a_1\end{smallmatrix}\middle|a\right)\Big\}$$

$$\cdot \quad Z_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}} \varphi^a\left(\begin{smallmatrix}2&2&2\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right)$$

$$= \mathcal{M}^1_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}} \varphi^a\left(\begin{smallmatrix}1&2&2\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right) + \mathcal{M}^2_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}} \varphi^a\left(\begin{smallmatrix}2&1&2\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right) + \mathcal{M}^3_{\substack{a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3}} \varphi^a\left(\begin{smallmatrix}2&2&1\\b_1&b_2&b_3\end{smallmatrix}|a\right) \tag{4.90}$$

$$+ \Big\{ \left(W^-_{a_1a_2b_3b_4} - W^-_{a_2a_1b_3b_4}\right) \varphi^a\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\b_4&b_3&a_3\end{smallmatrix}|a\right) - \left(W^-_{a_1a_3b_3b_4} -$$

$$W^-_{a_3a_1b_3b_4}\right) \varphi^a\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\b_4&b_3&a_2\end{smallmatrix}|a\right) + \left(W^-_{a_2a_3b_3b_4} - W^-_{a_3a_2b_3b_4}\right) \varphi^a\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\b_4&b_3&a_1\end{smallmatrix}|a\right) \Big\}$$

An dieser Darstellung erkennt man, daß die vier Sektoren

$$\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}|a\right) \tag{4.91}$$

$$\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}|a\right), \quad \varphi^a\left(\begin{smallmatrix}1&2&1\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}|a\right), \quad \varphi^a\left(\begin{smallmatrix}2&1&1\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}|a\right) \tag{4.92}$$

$$\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}2&2&1\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}|a\right), \quad \varphi^a\left(\begin{smallmatrix}2&1&2\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}|a\right), \quad \varphi^a\left(\begin{smallmatrix}1&2&2\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}|a\right) \tag{4.93}$$

$$\varphi^a\left(\begin{smallmatrix}2&2&2\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}|a\right) \tag{4.94}$$

durch die Massenterme $\mathcal{M}^i$, i=1,2,3 und auch durch die Wechselwirkungsterme gekoppelt werden. Zum Beispiel treten in (4.84) neben gemischten Termen, welche die Hilfsfelder in der Kombination (1 1 2) und (2 1 2) bzw. (1 2 2) enthalten und somit auch zu gemischt-symmetrischen Darstellungen der S(3) beitragen, auch Terme der Kombination (1 1 1) auf, die nur zur symmetrischen Darstellung der S(3) gehören.

Um die Analogie zum Zweiteilchenfall in Abschnitt 4.2 herzustellen und die Symmetrieverhältnisse zu klären, gehen wir nochmals von Gl. (4.77) aus und verfahren wir im Zweiteilchenfall.

Wir zerlegen die Indizes nach (4.54). Aus den Eigenschaften der S(3) (vergleiche (4.36)) folgt für C^a im Dreiteilchenfall

$$C^a = C^a \otimes C^s + C^s \otimes C^a \tag{4.95}$$
$$+ 2^{-1/2}\left(C^\gamma_{11} \otimes C^\gamma_{22} + C^\gamma_{22} \otimes C^\gamma_{11} - C^\gamma_{21} \otimes C^\gamma_{12} - C^\gamma_{12} \otimes C^\gamma_{21} \right)$$

Der Übersichtlichkeit halber haben wir die Indizes wieder weggelassen. Die Operatoren C^f_{rs} hinter dem $\otimes$-Produkt beziehen sich auf die Hilfsfelder, diejenigen vor dem $\otimes$-Produkt auf den Restindex.

Durch die Definition der Hilfsfelder ergeben sich Einschränkungen für die Zerlegung von C^a in (4.95). Da nur die acht Kombinationen (4.91) - (4.94) möglich sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen

$$\bar\varphi\begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} a) = \bar\varphi\begin{pmatrix} i\, i\, k \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} a) \tag{4.96}$$

Für i=k ergeben sich (4.91) und (4.94); die zwei letzten Terme von (4.92) und (4.93) erhalten wir durch (i≠k):

$$\bar\varphi\begin{pmatrix} i\, k\, i \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} a) = (P_{23})^{iik}_{l_1 l_2 l_3} \bar\varphi\begin{pmatrix} l_1 l_2 l_3 \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} a) \tag{4.97}$$

$$\bar\varphi\begin{pmatrix} k\, i\, i \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} a) = (P_{13})^{iik}_{l_1 l_2 l_3} \bar\varphi\begin{pmatrix} l_1 l_2 l_3 \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} a) \tag{4.98}$$

Aufgrund von (4.96) ergeben sich folgende Einschränkungen im Hilfsraum (vergl. (4.33)):

$$(C^a)^{iik}_{l_1 l_2 l_3} \bar\varphi\begin{pmatrix} l_1 l_2 l_3 \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} = (C^\gamma_{11})^{iik}_{l_1 l_2 l_3} \bar\varphi\begin{pmatrix} l_1 l_2 l_3 \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} = (C^\gamma_{21})^{iik}_{l_1 l_2 l_3} \bar\varphi\begin{pmatrix} l_1 l_2 l_3 \\ a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{4.99}$$

Daher reduziert sich im Dreiteilchenfall die Zerlegung von C^a auf

$$C^a = C^a \otimes C^s + 2^{-1}\left(C^\gamma_{11} \otimes C^\gamma_{22} - C^\gamma_{21} \otimes C^\gamma_{12} \right) \tag{4.100}$$

Setzen wir (4.100) in (4.77) ein, so erhalten wir zwei Gleichungen für die zwei orthogonalen Unterräume, die durch $C^a \otimes C^s$ sowie durch

$\frac{1}{2}(C^{\gamma}_{11} \otimes C^{\gamma}_{22} - C^{\gamma}_{21} \otimes C^{\gamma}_{12})$ charakterisiert sind:

I

$$E\, C^{a} \otimes C^{s}\, \bar{\varphi} \tag{4.101}$$

$$= 3 C^{a} \otimes C^{s} \left[\delta\delta\mathcal{D} \otimes \delta\delta\delta + \delta\delta\mathcal{M} \otimes \delta\delta\sigma^{1} \right] \cdot$$

$$\cdot \left(C^{a} \otimes C^{s} + 2^{-1} \left(C^{\gamma}_{11} \otimes C^{\gamma}_{22} - C^{\gamma}_{21} \otimes C^{\gamma}_{12} \right) \right) \bar{\varphi}$$

$$+ 6 C^{a} \otimes C^{s} \left[W^{+} \delta \otimes \delta_{2111} \delta + W^{-} \delta \otimes \delta_{2211} \delta \right] \cdot$$

$$\cdot \left(C^{a} \otimes C^{s} + 2^{-1} \left(C^{\gamma}_{11} \otimes C^{\gamma}_{22} - C^{\gamma}_{21} \otimes C^{\gamma}_{12} \right) \right) \bar{\varphi}$$

II

$$E \left(C^{\gamma}_{11} \otimes C^{\gamma}_{22} - C^{\gamma}_{21} \otimes C^{\gamma}_{12} \right) \bar{\varphi} \tag{4.102}$$

$$= 3 \left(C^{\gamma}_{11} \otimes C^{\gamma}_{22} - C^{\gamma}_{21} \otimes C^{\gamma}_{12} \right) \left[\delta\delta\mathcal{D} \otimes \delta\delta\delta + \delta\delta\mathcal{M} \otimes \delta\delta\sigma^{1} \right] \cdot$$

$$\cdot \left(C^{a} \otimes C^{s} + 2^{-1} \left(C^{\gamma}_{11} \otimes C^{\gamma}_{22} - C^{\gamma}_{21} \otimes C^{\gamma}_{12} \right) \right) \bar{\varphi}$$

$$+ 6 \left(C^{\gamma}_{11} \otimes C^{\gamma}_{22} - C^{\gamma}_{21} \otimes C^{\gamma}_{12} \right) \left[W^{+} \delta \otimes \delta_{2111} \delta + W^{-} \delta \otimes \delta_{2211} \delta \right] \cdot$$

$$\cdot \left(C^{a} \otimes C^{s} + 2^{-1} \left(C^{\gamma}_{11} \otimes C^{\gamma}_{22} - C^{\gamma}_{21} \otimes C^{\gamma}_{12} \right) \right) \bar{\varphi}$$

Wir werten die einzelnen Terme von (4.101) weiter aus. Dazu benutzen wir die Eigenschaften der Youngoperatoren (4.20), (4.23), die Gleichungen (4.35) - (4.41) und die Sätze (4.45) - (4.48). Die Hilfsfeldabhängigkeit betrachten wir jetzt im einzelnen.

a) $$C^a \otimes C^s \left[\delta\delta\mathcal{D} \otimes \mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1} \right] C^a \otimes C^s \bar{\varphi} \tag{4.103}$$

$$= C^a \, \delta\delta\mathcal{D} \, C^a \otimes C^s \, \mathbb{1}\mathbb{1}\delta \, C^s \, \bar{\varphi}$$

$$= (\delta\delta\mathcal{D})^s C^a \otimes C^s \, \bar{\varphi}$$

Für $\bar{\varphi}^{111}$ und $\bar{\varphi}^{222}$ ist $\bar{\varphi}^{iii} = C^s \, \bar{\varphi}^{iii}$ in den Hilfsfeldern identisch erfüllt. Für $\bar{\varphi}^{112}$ (und analog für $\bar{\varphi}^{221}$) setzen wir:

$$C^s \, \bar{\varphi}^{112} =: \bar{\varphi}^{s\,112} \tag{4.104}$$

b) $$C^a \otimes C^s \left[\delta\delta\mathcal{D} \otimes \delta\delta\delta \right] \left(C^\gamma_{11} \otimes C^\gamma_{22} - C^\gamma_{21} \otimes C^\gamma_{12} \right) \bar{\varphi} = 0 \tag{4.105}$$

wegen

$$C^s \, \mathbb{1}\mathbb{1}\delta \, C^f = C^s C^f = 0 \qquad \forall_{f \neq s}$$

c) $$C^a \otimes C^s \left[\delta\delta\mathcal{M} \otimes \delta\delta\sigma^1 \right] C^a \otimes C^s \bar{\varphi} \tag{4.106}$$

$$= (\delta\delta\mathcal{M})^s C^a \otimes (\delta\delta\sigma^1)^s C^s \, \bar{\varphi}$$

Für $\bar{\varphi}^{111}$ (analog $\bar{\varphi}^{222}$) folgt aus dem Hilfsfeldanteil

$$(\delta\delta\sigma^1)^s C^s \bar{\varphi}^{111} = (\delta\delta\sigma^1)^s \bar{\varphi}^{111} \tag{4.107}$$

$$= \frac{1}{3}(\bar{\varphi}^{112} + \bar{\varphi}^{121} + \bar{\varphi}^{211})$$

$$= \bar{\varphi}^{s112}$$

Für $\bar{\varphi}^{112}$ (analog $\bar{\varphi}^{221}$) folgt

$$(\delta\delta\sigma^1)^s C^s \bar{\varphi}^{112} = \frac{1}{9}(\delta\delta\sigma^1 + \delta\sigma^1\delta + \sigma^1\delta\delta)(\bar{\varphi}^{112} + \bar{\varphi}^{121} + \bar{\varphi}^{211})$$

$$= \frac{1}{3}\bar{\varphi}^{111} + \frac{2}{3}\bar{\varphi}^{s221} \tag{4.108}$$

d) $$C^a \otimes C^s [\delta\delta\mathcal{M} \otimes \delta\delta\sigma^1](C^\gamma_{11} \otimes C^\gamma_{22} - C^\gamma_{21} \otimes C^\gamma_{12}) \tag{4.109}$$

$$= [C^a \delta\delta\mathcal{M} C^\gamma_{11} \otimes C^s \delta\delta\sigma^1 C^\gamma_{22}$$

$$- C^a \delta\delta\mathcal{M} C^\gamma_{21} \otimes C^s \delta\delta\sigma^1 C^\gamma_{12}]\bar{\varphi}$$

$$= [C^a \delta\delta\mathcal{M} C^\gamma_{11} \otimes C^s \delta\delta\sigma^1 C^\gamma_{22}]\bar{\varphi}$$

Für den zweiten Summanden gilt

$$C^a \delta\delta\mathcal{M} C^\gamma_{21} = (\delta\delta\mathcal{M})^\gamma_{11} C^\gamma_{21} - (\delta\delta\mathcal{M})^\gamma_{21} C^\gamma_{11} \tag{4.110}$$

Wegen (4.38) und (4.41) verschwinden die Summen auf der rechten Seite einzeln.

Setzt man $\bar{\varphi}^{111}$ (analog $\bar{\varphi}^{222}$) in (4.109) ein, so ergibt sich kein Beitrag, denn

$$C^{\gamma}_{22}\,\bar{\varphi}^{111} = 0 \qquad (4.111)$$

Für $\bar{\varphi}^{112}$ (analog $\bar{\varphi}^{221}$) hingegen gilt

$$\begin{aligned} C^{\varsigma}\,\delta\delta^{\prime}\,C^{\gamma}_{22}\,\bar{\varphi}^{112} &= C^{\varsigma}\,\delta\delta^{\prime}\,\tfrac{1}{3}\left(2\bar{\varphi}^{112}-\bar{\varphi}^{211}-\bar{\varphi}^{121}\right) \\ &= C^{\varsigma}\,\tfrac{1}{3}\left(2\bar{\varphi}^{111}-\bar{\varphi}^{212}-\bar{\varphi}^{122}\right) \qquad (4.112) \\ &= \tfrac{2}{3}\,\bar{\varphi}^{111}-\tfrac{2}{3}\,\bar{\varphi}^{\varsigma 221} \end{aligned}$$

Aus (4.112) resultieren also (in den Hilfsfeldern) nur symmetrische Kombinationen. Diese Funktionen müssen aber dann in den restlichen Indizes antisymmetrisch sein. Aus (4.101) folgt jedoch bei Einsetzen von (4.112)

$$C^{a}(\delta\delta M)\,C^{\gamma}_{11}\left[\tfrac{2}{3}\,\bar{\varphi}^{111}-\tfrac{2}{3}\,\bar{\varphi}^{\varsigma 221}\right]$$

C^{γ}_{11} angewendet auf eine (in den restlichen Indizes) antisymmetrische Funktion ergibt aber Null. Diese Massenterme liefern daher keinen Beitrag.

e) $$C^{a}\otimes C^{\varsigma}\left[W^{+}\delta\otimes\delta_{2111}\delta\right]C^{a}\otimes C^{\varsigma}\,\bar{\varphi}$$

$$\cdot = C^{a}\,W^{+}\delta\,C^{a}\otimes C^{\varsigma}\,\delta_{2111}\,\delta\,C^{\varsigma}\,\bar{\varphi}$$

Um hier den Hilfsfeldanteil auszuwerten, schreiben wir diese Indizes explizit aus (vergl. (3.34) - (3.38)):

$$C^s\,\delta_{2111}\,\delta\,C^s\,\bar{\varphi} \longrightarrow \tag{4.113}$$

$$C^{s}_{\substack{i_1 i_2 i_3 \\ k_1 k_2 m}}\;\delta_{\substack{k_1 k_2 k_3 k_4 \\ 2\,1\,1\,1}}\;\delta_{mn}\;C^{s}_{\substack{k_4 k_3 n \\ \ell_1 \ell_2 \ell_3}}\;\bar{\varphi}^{\ell_1 \ell_2 \ell_3}$$

$$= C^{s}_{\substack{i_1 i_2 i_3 \\ 2\,1\,n}}\;C^{s}_{\substack{1\,1\,n \\ \ell_1 \ell_2 \ell_3}}\;\bar{\varphi}^{\ell_1 \ell_2 \ell_3}$$

$$= C^{s}_{\substack{i_1 i_2 i_3 \\ 2\,1\,n}}\;\bar{\varphi}^{s\,1\,1\,n}$$

Daran erkennt man, daß W^+ nur folgende Beiträge im symmetrischen Sektor gibt:

$$\begin{aligned} (i_1 i_2 i_3) = (112) &\quad\leftrightarrow\quad \bar{\varphi}^{s\,111} \\ (i_1 i_2 i_3) = (221) &\quad\leftrightarrow\quad \bar{\varphi}^{s\,112} \end{aligned} \tag{4.114}$$

Entsprechendes gilt für W^-. Ersetzt man $\delta_{2111} \to \delta_{2211}$ in (4.113), so folgen Beiträge für:

$$\begin{aligned} (i_1 i_2 i_3) = (221) &\quad\leftrightarrow\quad \bar{\varphi}^{s\,111} \\ (i_1 i_2 i_3) = (222) &\quad\leftrightarrow\quad \bar{\varphi}^{s\,112} \end{aligned} \tag{4.115}$$

f) Kopplungen an den Sektor II in der Wechselwirkung drücken sich in folgenden Hilfsfeldtermen aus: zunächst ergibt sich für W^+

$$C^s\,\delta_{2111}\,\delta\,C^{\gamma}_{22}\,\bar{\varphi} \longrightarrow C^{s}_{\substack{i_1 i_2 i_3 \\ 2\,1\,n}}\;\bar{\varphi}^{\gamma\,11n}_{22}$$

$$C^s\,\delta_{2111}\,\delta\,C^{\gamma}_{12}\,\bar{\varphi} \longrightarrow C^{s}_{\substack{i_1 i_2 i_3 \\ 2\,1\,n}}\;\bar{\varphi}^{\gamma\,11n}_{12}$$

Beiträge erhält man aufgrund der γ-Symmetrie nur für n=2:

$$(i_1 i_2 i_3) = (221) \quad \longleftrightarrow \quad \bar{\varphi}^{\gamma\,112} \tag{4.116}$$

Analog zu e), f) erhält man für W^--Terme

$$(i_1 i_2 i_3) = (222) \quad \longleftrightarrow \quad \bar{\varphi}^{\gamma\,112} \tag{4.117}$$

Wir setzen die Rechnungen a) - f) in (4.101) ein und gliedern die so entstehenden Gleichungen in vier Gruppen nach $\bar{\varphi}^{111}$, $\bar{\varphi}^{s112}$, $\bar{\varphi}^{s221}$, $\bar{\varphi}^{222}$. Wegen (4.103) haben $E\,C^a \otimes C^S$ und $(\delta\delta D)^S C^a \otimes C^S$ dieselbe Abhängig von $C^a \otimes C^S$, daher fassen wir sie durch folgende Definition zusammen:

$$\mathcal{Z} := \left[E\,\delta\delta\delta - 3\,(\delta\delta\mathcal{D})^S \right] \tag{4.118}$$

Dann erhalten wir für den symmetrischen Sektor

$$\mathcal{Z}\,C^a \bar{\varphi}^{111} = 3\,(\delta\delta\mathcal{M})^S C^a\,\bar{\varphi}^{s\,112} \tag{4.119}$$

$$\mathcal{Z}\,C^a \bar{\varphi}^{s\,112} = 3\,(\delta\delta\mathcal{M})^S C^a \left[\tfrac{1}{3}\,\bar{\varphi}^{111} + \tfrac{2}{3}\,\bar{\varphi}^{s\,221} \right] \tag{4.120}$$

$$+ \; 2\,C^a W^+ \delta\, C^a\,\bar{\varphi}^{111}$$

$$\mathcal{Z}\,C^a \bar{\varphi}^{s\,221} = 3\,(\delta\delta\mathcal{M})^S C^a \left[\tfrac{1}{3}\,\bar{\varphi}^{222} + \tfrac{2}{3}\,\bar{\varphi}^{s\,112} \right] \tag{4.121}$$

$$+ \; 2\,C^a W^+ \delta\, C^a\,\bar{\varphi}^{s\,112} + 2\,C^a W^- \delta\, C^a\,\bar{\varphi}^{111}$$

$$+ \; \left(C^a W^+ \delta\, C^\gamma_{11}\,\bar{\varphi}^{\gamma\,112}_{22} + C^a W^+ \delta\, C^\gamma_{21}\,\bar{\varphi}^{\gamma\,112}_{12} \right)$$

$$\mathcal{Z}\,C^a \bar{\varphi}^{222} = 3\,(\delta\delta\mathcal{M})^S C^a\,\bar{\varphi}^{s\,221} + 6\,C^a W^- \delta\, C^a\,\bar{\varphi}^{s\,112} \tag{4.122}$$

$$+ \; 3\left(C^a W^- \delta\, C^\gamma_{11}\,\bar{\varphi}^{\gamma\,112}_{22} + C^a W^- \delta\, C^\gamma_{21}\,\bar{\varphi}^{\gamma\,112}_{12} \right)$$

An (4.119) und (4.122) erkennt man, daß in diesem (in den Hilfsfeldern) symmetrischen Sektor durch die Wechselwirkungsterme Kopplungen an die Felder $\bar{\varphi}^{\gamma(112)}$ des Sektors II der gemischten Symmetrien enthalten sind.

Auch im Zweiteilchenfall hatten wir eine Kopplung der beiden Sektoren; dort wurde sie jedoch nicht von den Wechselwirkungstermen, sondern durch die Massenterme gegeben. Durch Übergang zum Schwerpunktsystem sind im Zweiteilchenfall diese Kopplungsterme weggefallen. Dadurch reduzierte sich die Lösung des Gesamtsystems auf Lösungen des (in den Hilfsfeldern) symmetrischen Sektors. In den Projektoren drückte sich diese Reduktion durch die Zerlegung

$$\left(C^{a}\right)_{\substack{l_1 l_2 \\ I_1 I_2}} \bar{\varphi}(I_1 I_2 | a) = \left(C^{a}\right)_{\substack{c_1 c_2 \\ a_1 a_2}} \otimes \left(C^{s}\right)_{\substack{l_1 l_2 \\ i_1 i_2}} \bar{\varphi}\left(\begin{matrix} i_1 i_2 \\ a_1 a_2 \end{matrix} | a\right) \tag{4.76}$$

aus.

In Kapitel 5 zeigen wir für die Entwicklung nach freien Diracspinoren im Dreiteilchenfall, daß beim Übergang zum Schwerpunktsystem $P_s \to 0$ und bei Massen M, die sehr viel größer sind als die Relativimpulse, die Wechselwirkungsterme $W^{\pm}\delta$ diagonal werden, d.h. $C^{a}\, W^{\pm}\delta\, C^{f} \to \alpha^{\pm} C^{a}\, C^{f} = 0$ für $f \neq a$. Die Kopplungsterme verschwinden also in dieser Näherung.

Daher können wir zumindest näherungsweise auch im Dreiteilchensystem den Antisymmetrisierer C^{a} auf analoge Weise zu (4.76) zerlegen:

$$\left(C^{a}\right)_{\substack{l_1 l_2 l_3 \\ I_1 I_2 I_3}} \bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3 | a) = \left(C^{a}\right)_{\substack{c_1 c_2 c_3 \\ a_1 a_2 a_3}} \otimes \left(C^{s}\right)_{\substack{l_1 l_2 l_3 \\ i_1 i_2 i_3}} \bar{\varphi}\left(\begin{matrix} i_1 i_2 i_3 \\ a_1 a_2 a_3 \end{matrix} | a\right) \tag{4.123}$$

und annehmen, daß durch diese Reduktion in der obigen Näherung die gesamte physikalische Information über die Eigenwerte von Dreiteilchenbindungszuständen enthalten ist.

Diese Reduktion bedeutet eine Entartung der in den Hilfsfeldern gemischten Funktionen in (4.92) und (4.93). Nur die symmetrische Kombination dieser Funktionen liefert einen Beitrag. Die Tatsache, daß die physikalische Funktion $\bar{\varphi}\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} | a\right)$ symmetrisch ist, unterstreicht die Forderung (4.123).

Des weiteren ist die Forderung (4.123) auch konstistent mit der Definition der Hilfsfelder. Aus (1.8) und (1.23) folgt

$$\psi_{a} = \sum_{i=1}^{4} \psi_{a}^{i}$$

Hierbei ist ψ_a der Feldoperator der ursprünglichen Felder.

Durch den Funktionalformalismus überträgt sich die Forderung (4.123) auf eine entsprechende Forderung an Produkte von Feldoperatoren. Für solche Produkte haben wir in Kapitel 1 folgende gleichzeitige Vertauschungsrelation abgeleitet:

$$\{\psi_a, \psi_b\} = 0 \tag{1.23}$$

$$\{\psi_a^i, \psi_b^k\} = \tilde{A}_{ab} \otimes \xi_i \delta_{ik} \tag{1.37}$$

wobei $\tilde{A}_{ab}$ zusammen mit (1.28) definiert ist. Da sich die Hilfsfeldeigenschaften als direktes Produkt schreiben lassen und der Hilfsfeldanteil symmetrisch ist, ist die Forderung (4.123) konsistent mit (1.22), (1.37).

Schließlich ist (4.123) auch konsistent mit der Definition des freien Propagators $F_{I_1 I_2}$ der Theorie, denn gemäß Anhang (A.10) ist $F_{I_1 I_2}$ ebenfalls symmetrisch in den Hilfsfeldern.

Durch die Forderung (4.123) fallen in (4.121) und (4.122) jeweils die letzten Zeilen weg. Diese reduzierten Gleichungen behandeln wir im nächsten Abschnitt weiter.

4. Gleichung für $\varphi^{(111)}$

Zu dem Gleichungssystem (4.119) - (4.122) wollen wir nun eine äquivalente Gleichung für die physikalische Funktion $\bar{\varphi}(\begin{smallmatrix}1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3\end{smallmatrix}|a)$ ableiten. Da alle Funktionen in diesen Gleichungen aufgrund ihrer Konstruktion antisymmetrisch in den Restindizes sind, schreiben wir im folgenden

$$\bar{\varphi}^s = C^a \bar{\varphi}^s$$

Der Index s bezieht sich auf den Hilfsfeldraum.

Des weiteren benutzen wir folgende Abkürzungen:

$$\varphi^1(a_1 a_2 a_3 | a) := \bar{\varphi}(\begin{smallmatrix}1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3\end{smallmatrix}|a) \tag{4.124}$$

$$\varphi^2(a_1 a_2 a_3 | a) := \bar{\varphi}(\begin{smallmatrix}2 & 2 & 2\\ a_1 & a_2 & a_3\end{smallmatrix}|a) \tag{4.125}$$

$$\varphi^3(a_1a_2a_3|a) := \bar{\varphi}^5\left(\begin{smallmatrix}2&2&1\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}|a\right) \tag{4.126}$$

$$\varphi^4(a_1a_2a_3|a) := \bar{\varphi}^5\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}|a\right) \tag{4.127}$$

und

$$\mathcal{M}^5 := 3(\delta\delta\mathcal{M})^c \tag{4.128}$$

$$\bar{W}^{\pm} := 6\,C^a W^{\pm} \delta C^a \tag{4.129}$$

Damit erhalten wir für die vier Gleichungen

$$Z\varphi^1 = \mathcal{M}^5\varphi^4 \tag{4.130}$$

$$Z\varphi^2 = \mathcal{M}^5\varphi^3 + \bar{W}^-\varphi^4 \tag{4.131}$$

$$3Z\varphi^3 = \mathcal{M}^5\varphi^2 + 2\mathcal{M}^5\varphi^4 + \bar{W}^+\varphi^4 + \bar{W}^-\varphi^1 \tag{4.132}$$

$$3Z\varphi^4 = \mathcal{M}^5\varphi^1 + 2\mathcal{M}^5\varphi^3 + \bar{W}^+\varphi^1 \tag{4.133}$$

bzw. als Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} Z & 0 & 0 & -\mathcal{M}^5 \\ 0 & Z & -\mathcal{M}^5 & -\bar{W}^- \\ -\bar{W}^- & -\mathcal{M}^5 & 3Z & -2\mathcal{M}^5 - \bar{W}^+ \\ -\mathcal{M}^5 - \bar{W}^+ & 0 & -2\mathcal{M}^5 & 3Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \\ \varphi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.134}$$

Um dieses Gleichungssystem aufzulösen, nehmen wir an, daß $(\mathcal{M}^s)^{-1}$ existiert. Probleme, die in diesem Zusammenhang auftreten, diskutieren wir in Kapitel 5. Unter dieser Voraussetzung folgt aus (4.130)

$$(\mathcal{M}^s)^{-1} Z \varphi^1 = \varphi^4 \tag{4.135}$$

Damit läßt sich φ^4 aus den restlichen drei Gleichungen eliminieren. (Zur Abkürzung schreiben wir $\mathcal{M}^s = \mathcal{M}$.)

$$Z\varphi^2 = \mathcal{M}\varphi^3 + \bar{W}^- \mathcal{M}^{-1} Z \varphi^1 \tag{4.136}$$

$$3Z\varphi^3 = \mathcal{M}\varphi^2 + 2Z\varphi^1 \tag{4.137}$$

$$+ \bar{W}^+ \mathcal{M}^{-1} Z \varphi^1 + \bar{W}^- \varphi^1$$

$$3Z\mathcal{M}^{-1} Z \varphi^1 = \mathcal{M}\varphi^1 + 2\mathcal{M}\varphi^3 + \bar{W}^+ \varphi^1 \tag{4.138}$$

Aus (4.138) folgt

$$\varphi^3 = \tfrac{3}{2} \mathcal{M}^{-1} Z \mathcal{M}^{-1} Z \varphi^1 - \tfrac{1}{2}\varphi^1 - \tfrac{1}{2} \mathcal{M}^{-1} \bar{W}^+ \varphi^1 \tag{4.139}$$

Setzt man (4.139) in (4.136) und (4.137) ein, so erhält man

$$Z\varphi^2 = \tfrac{3}{2} Z\mathcal{M}^{-1} Z \varphi^1 - \tfrac{1}{2}\mathcal{M}\varphi^1 \tag{4.140}$$

$$- \tfrac{1}{2} \bar{W}^+ \varphi^1 + \bar{W}^- \mathcal{M}^{-1} Z \varphi^1$$

$$\tfrac{9}{2} Z\mathcal{M}^{-1} Z \mathcal{M}^{-1} Z \varphi^1 - \tfrac{3}{2} Z\varphi^1 - \tfrac{3}{2} Z\mathcal{M}^{-1} \bar{W}^+ \varphi^1 \tag{4.141}$$

$$= \mathcal{M}\varphi^2 + 2Z\varphi^1 + \bar{W}^+ \mathcal{M}^{-1} Z \varphi^1 + \bar{W}^- \varphi^1$$

Gl. (4.141) läßt sich nach φ^2 auflösen und in (4.140) einsetzen. Für φ^1 ergibt sich damit folgende Gleichung

$$\left(\frac{9}{2}\, Z M^{-1} Z M^{-1} Z M^{-1} Z - 5\, Z M^{-1} Z + \frac{1}{2} M\right) \varphi^1 \qquad (4.142)$$

$$- \left(\frac{3}{2}\, Z M^{-1} Z M^{-1} \bar{W}^+ + Z M^{-1} \bar{W}^+ M^{-1} Z - \frac{1}{2} \bar{W}^+\right) \varphi^1$$

$$+ \left(Z M^{-1} \bar{W}^- - \bar{W}^- M^{-1} Z\right) \varphi^1 = 0$$

Die Gleichung (4.142) für die physikalische Funktion φ^1 ist äquivalent zu dem System von Gleichungen (4.134). Aufgrund dieser Äquivalenz ist sichergestellt, daß (4.134) dieselbe physikalische Beschreibung der Dreiteilchenbindungszustände liefert wie (4.142). Da mit (4.134) einfacher zu rechnen ist als mit (4.142), benutzen wir für die weiteren Rechnungen das Gleichungssystem (4.134).

5. Linkslösungen

Die Rechnungen in Kapitel 3 und 4 erfolgten bisher für die Funktionen $\bar{\varphi}(^{i_1 i_2 i_3}_{a_1 a_2 a_3}|a)$, die wir wegen (3.2) auch als Rechtslösungen der Dreiteilchengleichungen bezeichnen können. Neben dem Eigenwert E sind wir auch an der Norm des zugehörigen Zustandes $|a\rangle$ interessiert. Zur Berechnung dieser Norm benötigen wir gemäß (2.48) neben den Rechtslösungen auch noch die Linkslösungen $\bar{\sigma}(^{i_1 i_2 i_3}_{a_1 a_2 a_3}|a)$, wie sie durch (3.7) definiert sind. Die Rechnungen für die Linkslösungen sind in analoger Weise zu denen der Rechtslösungen durchführbar. Wir geben die Rechnungen für die Linkslösungen daher in verkürzter Form wieder.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist (3.7) und (3.8). Auch hier gehen wir, wie in Kapitel 3.1 beschrieben, zu Relativfunktionalen über. Für die Operatoren E, K, P gelten genau dieselben Relationen; K ist durch (3.26) und (3.27) gegeben, P durch (3.39) und (3.35).

Formal liegt daher folgende Gleichung vor

$$E\ \bar{\sigma}(I_1 I_2 I_3|a) \lesssim_{\mp} 0|\ \bar{\partial}_{I_3}\bar{\partial}_{I_2}\bar{\partial}_{I_1} \tag{4.143}$$

$$= \bar{\sigma}(I_1 I_2 I_3|a)\ \mathbb{K}_{\kappa_1\kappa_2} \lesssim_{\mp} 0|\ \bar{\partial}_{I_3}\bar{\partial}_{I_2}\bar{\partial}_{I_1}\bar{\jmath}_{\kappa_1}\bar{\partial}_{\kappa_2}$$

$$+ \bar{\sigma}(I_1 I_2 I_3|a)\ \mathbb{W}_{\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4} \lesssim_{\mp} 0|\ \bar{\partial}_{I_3}\bar{\partial}_{I_2}\bar{\partial}_{I_1}\bar{\jmath}_{\kappa_1}\bar{\jmath}_{\kappa_2}\bar{\partial}_{\kappa_3}\bar{\partial}_{\kappa_4}$$

Gl. (4.143) projizieren wir analog zu (3.41) mit

$$\bar{\jmath}_{L_1}\bar{\jmath}_{L_2}\bar{\jmath}_{L_3}|0\rangle_{\mp} \tag{4.144}$$

Es ergeben sich dann analoge Gleichungen zu (3.48):

$$\bar{\sigma}(I_1 I_2 I_3|a)\,(C^a)^{I_1 I_2 I_3}_{L_1 L_2 L_3}\ E \tag{4.145}$$

$$= \bar{\sigma}(I_1 I_2 I_3|a)\,(C^a)^{I_1 I_2 I_3}_{\kappa_1\kappa_2\kappa_3}\left(\mathbb{K}_{\kappa_1 M_1}\delta_{\kappa_2 M_2}\delta_{\kappa_3 M_3}\right)(C^a)^{M_1 M_2 M_3}_{L_1 L_2 L_3}$$

$$+ \bar{\sigma}(I_1 I_2 I_3|a)\,6\,(C^a)^{I_1 I_2 I_3}_{\kappa_1\kappa_2 M}\,\mathbb{W}_{\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4}\,\delta_{MN}\,(C^a)^{\kappa_4\kappa_3 N}_{L_1 L_2 L_3}$$

Auch für die Funktionen $\bar{\sigma}\left(\begin{smallmatrix} i_1 i_2 i_3 \\ a_1 a_2 a_3 \end{smallmatrix}|a\right)$ fordern wir die totale Symmetrie in den Hilfsfeldern

$$\bar{\sigma}(I_1 I_2 I_3|a)\,(C^a)^{I_1 I_2 I_3}_{L_1 L_2 L_3} = \bar{\sigma}\left(\begin{smallmatrix} i_1 i_2 i_3 \\ a_1 a_2 a_3 \end{smallmatrix}|a\right)(C^a)^{a_1 a_2 a_3}_{c_1 c_2 c_3}\otimes(C^s)^{i_1 i_2 i_3}_{L_1 L_2 L_3} \tag{4.146}$$

Mit der Forderung (4.146) läßt sich (4.145) auf den symmetrischen Unterraum reduzieren:

$$\bar{\sigma}\, C^a \otimes C^s\, Z \tag{4.147}$$

$$= 3\bar{\sigma}\left[C^a (\delta\delta\mathcal{M})^s \otimes C^s (\delta\delta\sigma^1)^s \right]$$

$$+ 6\bar{\sigma}\left[C^a W^+ \delta C^a \otimes C^s \delta_{2111} \delta C^s \right.$$

$$\left. + C^a W^- \delta C^a \otimes C^s \delta_{2211} \delta C^s \right]$$

Während sich im Massenterm keine Änderungen ergeben, folgt für den Wechselwirkungsterm

$$\bar{\sigma}\, C^s \delta_{2111} \delta C^s \longrightarrow$$

$$\bar{\sigma}^{s\, k_1 k_2 n} \underset{2\,1\,1\,1}{\delta_{k_1 k_2 k_3 k_4}} \delta_{nm} \underset{l_1 l_2 l_3}{(C^s)_{k_4 k_3 m}} \tag{4.148}$$

$$= \bar{\sigma}^{s\, 21n} \underset{l_1 l_2 l_3}{(C^s)_{11n}}$$

$$= \bar{\sigma}^{s\, 21n} \tfrac{1}{3}\left(\delta_{nl_3} \underset{l_1 l_2}{(C^s)_{11}} + \delta_{nl_2} \underset{l_1 l_3}{(C^s)_{11}} + \delta_{nl_1} \underset{l_2 l_3}{(C^s)_{11}} \right)$$

Damit ergeben sich aus (4.147) folgende vier Gleichungen:

$$\bar{\sigma}^{111}\, C^a Z = 3\bar{\sigma}^{s\,112} C^a (\delta\delta\mathcal{M})^s \tag{4.149}$$

$$+ 6\bar{\sigma}^{s\,112} C^a W^+ \delta C^a + 6\bar{\sigma}^{s\,221} C^a W^- \delta C^a$$

$$\bar{\sigma}^{s\,112} C^a Z = 3\left[\tfrac{1}{3}\bar{\sigma}^{111} + \tfrac{2}{3}\bar{\sigma}^{s\,221} \right] C^a (\delta\delta\mathcal{M})^s \tag{4.150}$$

$$+ 2\bar{\sigma}^{s\,221} C^a W^+ \delta C^a + 2\bar{\sigma}^{s\,222} C^a W^- \delta C^a$$

$$\bar{\sigma}^{s\,221}\,C^a Z \;=\; 3\left[\tfrac{1}{3}\,\bar{\sigma}^{s\,222} + \tfrac{2}{3}\,\bar{\sigma}^{s\,112}\right] C^a (\delta\delta\mathcal{M})^s \tag{4.151}$$

$$\bar{\sigma}^{222}\,C^a Z \;=\; 3\,\bar{\sigma}^{s\,221}\,C^a (\delta\delta\mathcal{M})^s \tag{4.152}$$

Definieren wir auch hier

$$\sigma^1(a_1a_2a_3\,|\,a) \;:=\; \bar{\sigma}\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}\,|\,a\right) \tag{4.153}$$

$$\sigma^2(a_1a_2a_3\,|\,a) \;:=\; \bar{\sigma}\left(\begin{smallmatrix}2&2&2\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}\,|\,a\right) \tag{4.154}$$

$$\sigma^3(a_1a_2a_3\,|\,a) \;:=\; \bar{\sigma}^s\left(\begin{smallmatrix}2&2&1\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}\,|\,a\right) \tag{4.155}$$

$$\sigma^4(a_1a_2a_3\,|\,a) \;:=\; \bar{\sigma}^s\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\a_1&a_2&a_3\end{smallmatrix}\,|\,a\right) \tag{4.156}$$

und benutzen wir gemäß (4.128) und (4.129) die Abkürzungen $\mathcal{M}^s$ und $\bar{W}^{\pm}$, so folgt aus (4.149) - (4.152):

$$\sigma^1 Z \;=\; \sigma^4\mathcal{M}^s + \sigma^4\bar{W}^+ + \sigma^3\bar{W}^- \tag{4.157}$$

$$\sigma^2 Z \;=\; \sigma^3\mathcal{M}^s \tag{4.158}$$

$$3\sigma^3 Z \;=\; \sigma^2\mathcal{M}^s + 2\,\sigma^4\mathcal{M}^s \tag{4.159}$$

$$3\sigma^4 Z \;=\; \sigma^1\mathcal{M}^s + 2\,\sigma^3\mathcal{M}^s + \sigma^3\bar{W}^+ + \sigma^2\bar{W}^- \tag{4.160}$$

bzw. als Matrixgleichung

$$(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4)\begin{pmatrix} Z & 0 & 0 & -M^S \\ 0 & Z & -M^S & -\bar{W}^- \\ -\bar{W}^- & -M^S & 3Z & -2M^S-\bar{W}^+ \\ -M^S-\bar{W}^+ & 0 & -2M^S & 3Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \qquad (4.161)$$

Vergleichen wir die Matrixgleichung (4.161) mit (4.134), so sehen wir, daß die Operatormatrizen in beiden Fällen dieselben sind. Die Rechtslösungen erhält man durch Multiplikation von rechts mit φ^i, i=1,...,4, die Linkslösung durch Multiplikation von links mit $(\sigma^i)^T$, i=1,...,4. Die Gleichungen (4.134) und (4.161) entsprechen den von Stumpf in [31] abgeleiteten Gleichungen.

Unter den in Kapitel 5 diskutierten Bedingungen läßt sich M^S invertieren und somit auch eine äquivalente Gleichung für σ^2 ableiten. (Zur Abkürzung schreiben wir $M^S = M$.)

$$\sigma^2\left(\tfrac{9}{2} Z M^{-1} Z M^{-1} Z M^{-1} Z - 5 Z M^{-1} Z + \tfrac{1}{2} M\right) \qquad (4.162)$$

$$- \sigma^2\left(\tfrac{3}{2} Z M^{-1} Z M^{-1} \bar{W}^+ + Z M^{-1} \bar{W}^+ M^{-1} Z - \tfrac{1}{2} \bar{W}^+\right)$$

$$+ \sigma^2\left(\bar{W}^- M^{-1} Z - Z M^{-1} \bar{W}^-\right) \quad = \quad 0$$

Im Gegensatz zu (4.142) hat diese Gleichung keine direkte physikalische Bedeutung. Die Größen σ^2 stellen im Sinne von (1.67) und (2.48) lediglich Hilfsgrößen zur Berechnung des Skalarproduktes dar:

$$\langle a | a \rangle \quad = \quad \sigma^-(I_1 I_2 I_3 | a)\ \varphi(I_1 I_2 I_3 | a)$$

Durch Übergang zu den Relativfunktionalen ergibt sich mit (3.16) für das Skalarprodukt:

$$\langle a|a\rangle$$

$$= \bar{\sigma}(I_1 I_2 I_3|a)\, U_{I_1 K_1} U_{I_2 K_2} U_{I_3 K_3} U_{K_1 L_1} U_{K_2 L_2} U_{K_3 L_3}\, \bar{\varphi}(L_1 L_2 L_3|a) \tag{4.163}$$

$$= \bar{\sigma}(I_1 I_2 I_3|a)\, \bar{\varphi}(I_1 I_2 I_3|a)$$

Schreiben wir die Hilfsfelder explizit aus, und beschränken wir uns auch hier auf die (in den Hilfsfeldern) symmetrischen Funktionen, so erhalten wir aus (4.163):

$$\langle a|a\rangle = \sigma^1(b_1 b_2 b_3|a)\,\varphi^1(b_1 b_2 b_3|a) + \sigma^2(b_1 b_2 b_3|a)\,\varphi^2(b_1 b_2 b_3|a) \tag{4.164}$$

$$+ 3\sigma^3(b_1 b_2 b_3|a)\,\varphi^3(b_1 b_2 b_3|a) + 3\sigma^4(b_1 b_2 b_3|a)\,\varphi^4(b_1 b_2 b_3|a)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4.130) - (4.133) für φ^i und (4.157) - (4.160) für σ^i, (i=1,2,3,4), läßt sich (4.164) durch σ^2 und φ^1 ausdrücken. Formal folgt

$$\varphi^2 = \left(\tfrac{9}{2}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{Z}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{Z}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{Z} - \tfrac{7}{2}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{Z} - \tfrac{3}{2}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{Z}\mathcal{M}^{-1}\bar{\mathcal{W}}^+ + \mathcal{M}^{-1}\bar{\mathcal{W}}^+\mathcal{M}^{-1}\mathcal{Z} + \mathcal{M}^{-1}\bar{\mathcal{W}}^-\right)\varphi^1 \tag{4.165}$$

$$\varphi^3 = \left(\tfrac{3}{2}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{Z}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{Z} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mathcal{M}^{-1}\bar{\mathcal{W}}^+\right)\varphi^1 \tag{4.166}$$

$$\varphi^4 = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{Z}\varphi^1 \tag{4.167}$$

und

$$\sigma^1 = \sigma^2\left(\tfrac{9}{2}\mathcal{Z}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{Z}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{Z}\mathcal{M}^{-1} - \tfrac{7}{2}\mathcal{Z}\mathcal{M}^{-1} - \mathcal{Z}\mathcal{M}^{-1}\bar{\mathcal{W}}^+\mathcal{M}^{-1} + \bar{\mathcal{W}}^-\mathcal{M}^{-1}\right) \tag{4.168}$$

$$\sigma^3 = \sigma^2 Z M^{-1} \tag{4.169}$$

$$\sigma^4 = \sigma^2 \left(\tfrac{3}{2} Z M^{-1} Z M^{-1} - \tfrac{1}{2} \right) \tag{4.170}$$

Aus (4.164) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \langle a|a \rangle = \sigma^2 \Big\{ & \tfrac{9}{2} \left(Z M^{-1} Z M^{-1} Z M^{-1} + M^{-1} Z M^{-1} Z M^{-1} Z \right. \\ & \left. + Z M^{-1} M^{-1} Z M^{-1} Z + Z M^{-1} Z M^{-1} M^{-1} Z \right) \\ & - 5 \left(Z M^{-1} + M^{-1} Z \right) \\ & - \left(Z M^{-1} \bar{W}^+ M^{-1} + \tfrac{3}{2} M^{-1} Z M^{-1} \bar{W}^+ - M^{-1} \bar{W}^+ M^{-1} Z + \tfrac{1}{2} M^{-1} \bar{W}^+ \right) \\ & + \left(\bar{W}^- M^{-1} + M^{-1} \bar{W}^- \right) \Big\} \varphi^1 \end{aligned} \tag{4.171}$$

Ist $\{...\}$ hermitesch, so folgt, wie in [9a, b, 19] gezeigt, daß

$$\sigma^2 \equiv (\varphi^1)^+ \tag{4.172}$$

gilt und somit die Norm von $|a\rangle$ positiv definit ist. Während Z und M aufgrund ihrer Definitionen bereits hermitesch sind und in (4.171) in den richtigen Kombinationen vorliegen, ist das für die Wechselwirkungsterme in dieser allgemeinen Form nicht zu sehen. Im Niederenergielimes (Abschnitt 5.4) liegt die Hermitizität von $\{...\}$ näherungsweise vor.

Kapitel 5: Näherungen

In Kapitel 4 konnten wir zeigen, daß mit Hilfe der nichtlinearen Spinortheorie und der Zustandsfunktionalmethode eine Gleichung für die Dreiteilchenbindungszustände (4.142) ableitbar ist. Außerdem läßt sich mit Hilfe der Linkslösungen die Norm dieser Zustände berechnen (4.171), ohne vom metrischen Fundamentaltensor explizit Gebrauch zu machen.

Zwei Probleme sind in Kapitel 4 noch offen geblieben. Das erste Problem ist die Frage der Invertierbarkeit des Massenoperators $\mathcal{M}^S$, wie er in (4.135) definiert ist. Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Schwerpunkt auf der Klärung struktureller Fragen, die bei der Berechnung von Eigenwerten der φ-Funktionen auftreten. Daher konstruieren wir hier nicht den ganzen Raum, auf dem $\mathcal{M}^S$ invertierbar ist, sondern zeigen beispielhaft, daß es einen solchen gibt.

Des weiteren ist auch noch nachzuweisen, daß im Niederenergielimes die Terme $C^a W^{\pm} \delta C^f$, $f \neq a$, verschwinden, d.h. daß der symmetrische Sektor entkoppelt.

Zum Schluß zeigen wir, daß die Gleichungen in dieser Näherung Bindungszustände selbstkonsistent beschreiben.

1. Invertierung von $\mathcal{M}$

Dazu gehen wir aus von

$$\varphi^i(a_1 a_2 a_3 | a) = \underset{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\varphi^i_{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3}} (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 | a) \quad , \quad i = 1,2,3,4 \qquad (5.1)$$

wie in Kapitel 4 definiert wurde. Hierbei sei nochmals daran erinnert, daß zur Beschreibung der Dynamik eines Bindungszustandes die Ortsvariablen ausreichen, wie im Anschluß an (1.56) dargestellt wurde. Für diese Funktionen betrachten wir nun den Sektor $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$. Diese Wahl bedeutet, daß (5.1) im Superspinindex $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ symmetrisch ist. Die Rechnung für andere Kombinationen $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ gehen ganz analog; daher beschränken wir uns auf dieses einfache Beispiel. Ebenso wie in den Arbeiten von Hailer [19] und Hornung [20] entwickeln wir (5.1) nach Diracspinoren

$$\varphi^{i}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\,|\,a) \tag{5.2}$$

$$:= \varphi^{i}_{\substack{1\,1\,1\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3}}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\,|\,a)$$

$$= (2\pi)^{-9/2}\int d^3p_1\,d^3p_2\,d^3p_3\;\tilde{\varphi}^{i}_{s_1s_2s_3}(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3\,|\,a)\cdot$$

$$\cdot\, u_{\alpha_1}(s_1\vec{p}_1)\,u_{\alpha_2}(s_2\vec{p}_2)\,u_{\alpha_3}(s_3\vec{p}_3)\;e^{i\sum_{i=1}^{3}\vec{x}_i\vec{p}_i}$$

In $\tilde{\varphi}^{i}(s_1s_2s_3\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3|a)$ wurde der Faktor $(8\,E_{p_1}\cdot E_{p_2}\cdot E_{p_3})^{-1}$ des Volumenelements absorbiert, wobei gilt

$$E_p := +\left(M^2+\vec{p}^{\,2}\right)^{1/2} > 0 \tag{5.3}$$

(5.2) bedeutet also eine Entwicklung von (5.1) nach Lösungen der freien Diracgleichung $u_\alpha(s,\vec{p})$ zur Masse $M=\frac{1}{2}(m_1+m_2)$. Definitionen und Formeln der Diracspinoren sind im Anhang B zu finden.

Die Entwicklung (5.2) setzen wir in

$$Z\varphi^{4} = \mathcal{M}^{S}\varphi^{4} \tag{4.130}$$

ein. Führen wir eine Fouriertransformation der ganzen Gleichung durch, so erhalten wir eine Gleichung für die Fouriertransformierten

$$\mathcal{F}\left[Z\varphi^{4}\right]_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\,|\,a) = \mathcal{F}\left[\mathcal{M}^{S}\varphi^{4}\right]_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\,|\,a) \tag{5.4}$$

Multiplizieren wir (5.4) mit

$$u^{+}_{\alpha_1}(\sigma_1\vec{k}_1)\,u^{+}_{\alpha_2}(\sigma_2\vec{k}_2)\,u^{+}_{\alpha_3}(\sigma_3\vec{k}_3) \tag{5.5}$$

so folgt aus (4.130) eine "projizierte Gleichung" für die Funktionen

$$\tilde{\varphi}^{i}_{s_1s_2s_3}(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3\,|\,a)$$

Formal können wir schreiben

$$\mathrm{Proj}\,[\mathcal{S}\,\varphi^4]_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a) \;=\; \mathrm{Proj}\,[\mathcal{M}^S\varphi^4]_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a) \qquad (5.6)$$

Im einzelnen ergibt das:

a) Linke Seite

$$\mathcal{S}\,[\,Z\varphi^4]_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a) \qquad (5.7)$$

$$= (2\pi)^9 \int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3x_3\; e^{-i\sum_{i=1}^{3}\vec{x}_i\vec{p}_i}\Big[\, E\,\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\delta_{\alpha_3\beta_3}$$

$$- \left(-i\gamma^0\gamma^m\partial_m + \gamma^0 M\right)_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\delta_{\alpha_3\beta_3} - \delta_{\alpha_1\beta_1}\left(-i\gamma^0\gamma^m\partial_m + \gamma^0 M\right)_{\alpha_2\beta_2}\delta_{\alpha_3\beta_3}$$

$$- \delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\left(-i\gamma^0\gamma^m\partial_m + \gamma^0 M\right)_{\alpha_3\beta_3}\Big] \cdot \int d^3p_1\, d^3p_2\, d^3p_3\; \tilde{\varphi}^{\,1}_{s_1s_2s_3}(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3|a) \cdot$$

$$\cdot\, u_{\beta_1}(s_1\vec{p}_1)\, u_{\beta_2}(s_2\vec{p}_2)\, u_{\beta_3}(s_3\vec{p}_3)\;\; \exp\Big\{+i\sum_{i=1}^{3}\vec{x}_i\vec{p}_i\Big\}$$

$$= \Big[\, E\,\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\delta_{\alpha_3\beta_3} - \left(\gamma^0\vec{\gamma}\vec{k}_1 + \gamma^0 M\right)_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\delta_{\alpha_3\beta_3}$$

$$- \delta_{\alpha_1\beta_1}\left(\gamma^0\vec{\gamma}\vec{k}_2 + \gamma^0 M\right)_{\alpha_2\beta_2}\delta_{\alpha_3\beta_3} - \delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\left(\gamma^0\vec{\gamma}\vec{k}_3 + \gamma^0 M\right)_{\alpha_3\beta_3}\Big] \cdot$$

$$\cdot\, \tilde{\varphi}^{\,1}_{s_1s_2s_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a)\, u_{\beta_1}(s_1\vec{k}_1)\, u_{\beta_2}(s_2\vec{k}_2)\, u_{\beta_3}(s_3\vec{k}_3)$$

Projektion mit (5.5) ergibt dann

$$\text{Proj}\left[Z\varphi^{1}\right]_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a) \tag{5.8}$$

$$= \Big[E\cdot u^{+}_{\alpha_1}(\sigma_1\vec{k}_1)u_{\alpha_1}(s_1k_1)\cdot u^{+}_{\alpha_2}(\sigma_2\vec{k}_2)u_{\alpha_2}(s_2\vec{k}_2)\cdot u^{+}_{\alpha_3}(\sigma_3\vec{k}_3)u_{\alpha_3}(s_3\vec{k}_3)$$

$$- \bar{u}_{\alpha_1}(\sigma_1\vec{k}_1)\left(\vec{\gamma}\vec{k}_1+M\right)_{\alpha_1\beta_1}u_{\beta_1}(s_1\vec{k}_1)\cdot u^{+}_{\alpha_2}(\sigma_2\vec{k}_2)u_{\alpha_2}(s_2\vec{k}_2)\cdot u^{+}_{\alpha_3}(\sigma_3\vec{k}_3)u_{\alpha_3}(s_3\vec{k}_3)$$

$$- u^{+}_{\alpha_1}(\sigma_1\vec{k}_1)u_{\alpha_1}(s_1\vec{k}_1)\cdot \bar{u}_{\alpha_2}(\sigma_2\vec{k}_2)\left(\vec{\gamma}\vec{k}_2+M\right)_{\alpha_2\beta_2}u_{\beta_2}(s_2\vec{k}_2)\cdot u^{+}_{\alpha_3}(\sigma_3\vec{k}_3)u_{\alpha_3}(s_3\vec{k}_3)$$

$$- u^{+}_{\alpha_1}(\sigma_1\vec{k}_1)u_{\alpha_1}(s_1\vec{k}_1)\cdot u^{+}_{\alpha_2}(\sigma_2\vec{k}_2)u_{\alpha_2}(s_2\vec{k}_2)\cdot \bar{u}_{\alpha_3}(\sigma_3\vec{k}_3)\left(\vec{\gamma}\vec{k}_3+M\right)_{\alpha_3\beta_3}u_{\beta_3}(s_3\vec{k}_3)\Big]\cdot$$

$$\cdot\ \tilde{\varphi}^{1}{}_{s_1s_2s_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a)$$

Wegen

$$u^{+}_{\alpha}(\sigma,\vec{k})\,u_{\alpha}(s\vec{k}) \quad = \quad \delta_{\sigma s} \tag{5.9}$$

$$\bar{u}_{\alpha}(\sigma\vec{k})\left(\vec{\gamma}\vec{k}+M\right)_{\alpha\beta}u_{\beta}(s\vec{k}) \quad = \quad E_k\,\delta_{\sigma s} \tag{5.10}$$

(vergl. Anhang B) folgt für (5.8)

$$\text{Proj}\left[Z\varphi^{1}\right]_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a) \tag{5.11}$$

$$= Z(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3)\ \tilde{\varphi}^{1}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a)$$

wobei

$$Z(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3) \quad := \quad \left[E-\left(E_{k_1}+E_{k_2}+E_{k_3}\right)\right] \tag{5.12}$$

b) Eine ganz analoge Rechnung für die rechte Seite von (4.68) ergibt

$$\text{Proj}\left[\mathcal{M}^S \varphi^4\right]_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a) \tag{5.13}$$

$$= \tfrac{1}{2}\Delta m\Big[\bar{u}_{\alpha_1}(\sigma_1\vec{k}_1)u_{\alpha_1}(s_1\vec{k}_1)\cdot u^+_{\alpha_2}(\sigma_2\vec{k}_2)u_{\alpha_2}(s_2\vec{k}_2)\cdot u^+_{\alpha_3}(\sigma_3\vec{k}_3)u_{\alpha_3}(s_3\vec{k}_3)$$

$$+ u^+_{\alpha_1}(\sigma_1\vec{k}_1)u_{\alpha_1}(s_1\vec{k}_1)\cdot \bar{u}_{\alpha_2}(\sigma_2\vec{k}_2)u_{\alpha_2}(s_2\vec{k}_2)\cdot u^+_{\alpha_3}(\sigma_3\vec{k}_3)u_{\alpha_3}(s_3\vec{k}_3)$$

$$+ u^+_{\alpha_1}(\sigma_1\vec{k}_1)u_{\alpha_1}(s_1\vec{k}_1)\cdot u^+_{\alpha_2}(\sigma_2\vec{k}_2)u_{\alpha_2}(s_2\vec{k}_2)\cdot \bar{u}_{\alpha_3}(\sigma_3\vec{k}_3)u_{\alpha_3}(s_3\vec{k}_3)\Big]\cdot$$

$$\cdot\ \tilde{\varphi}^4_{\sigma_1 s_2 s_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a)$$

Wegen (5.9) und mit

$$\bar{u}_\alpha(\sigma\vec{k})\,u_\alpha(s\vec{k}) \quad = \quad M\cdot E_k^{-1}\,\delta_{\sigma s} \tag{5.14}$$

(vergl. Anhang B) folgt

$$\text{Proj}\left[\mathcal{M}^S\varphi^4\right]_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a)$$

$$= \quad M(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3)\,\tilde{\varphi}^4_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a) \tag{5.15}$$

wobei

$$M(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3) \quad := \quad \tfrac{1}{2}\Delta m\, M\left[E^{-1}_{k_1} + E^{-1}_{k_2} + E^{-1}_{k_3}\right] \tag{5.16}$$

Da $E_{k_i} > 0$, i=1,2,3, existiert für (5.16) $M^{-1}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3)$.

Damit ist am Beispiel der Entwicklung (5.2) gezeigt, daß ein Teilraum existiert, auf dem der Massenoperator $\mathcal{M}^S$, wie er in (4.128) definiert ist, invertierbar ist. In der gewählten Entwicklung lautet er

$$M^{-1}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3) = 2(\Delta m M)^{-1}\left[E_{k_1}^{-1}+E_{k_2}^{-1}+E_{k_3}^{-1}\right]^{-1} \qquad (5.17)$$

In diesem Teilraum läßt sich daher der ganze Auflösungsformalismus von Gleichungen (4.135) und folgende anwenden.

Das zweite Problem, das in Kapitel 4 offenblieb, war die näherungsweise Entkopplung der Gleichungen (4.119) - (4.122) vom Sektor der gemischten Symmetrie. Diesem Problem sind die beiden nächsten Abschnitte dieses Kapitels gewidmet.

2. Darstellung der Wechselwirkungsterme

In den Gleichungen (4.119) - (4.122) treten Wechselwirkungsterme der Form

$$C^a W^{\pm} \delta C^f \bar{\varphi}^{\tilde{f}\,112}_{rs} \quad , \quad f \in \{a,\gamma\} \qquad (5.18)$$

und

$$C^o W^{\pm} \delta C^a \bar{\varphi}^{s\,111} \qquad (5.19)$$

auf. Um die Nomenklatur von (4.124) - (4.127) übernehmen zu können, definieren wir neben

$$\varphi^1 := C^a \bar{\varphi}^{s\,111} \qquad (4.124)$$

$$\varphi^2 := C^a \bar{\varphi}^{s\,222} \qquad (4.125)$$

$$\varphi^3 := C^a \bar{\varphi}^{s\,221} \qquad (4.126)$$

$$\varphi^4 := C^o \bar{\varphi}^{s\,112} \qquad (4.127)$$

noch zusätzlich

$$\varphi^5 := C^{\gamma}_{11} \bar{\varphi}^{\gamma\,112}_{22} \qquad (5.20)$$

$$\varphi^b \quad := \quad C^{\gamma}_{21}\, \bar{\varphi}^{\gamma\,112}_{12} \tag{5.21}$$

Die Wechselwirkungsterme (5.18) und (5.19) lassen sich damit formal schreiben

$$C^a W^{\pm} \delta\, C^{f}_{rs}\, \bar{\varphi}^{\tilde{f}}_{\tilde{r}\tilde{s}} \quad = \quad C^a W^{\pm} \delta\, \varphi^i \tag{5.22}$$

Dann folgt für die Wechselwirkungsterme

$$\left(C^a W^{\pm} \delta \varphi^i\right)(a_1 a_2 a_3) \tag{5.23}$$

$$= 6 (C^a)_{\substack{a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 c}} W^{\pm}_{b_1 b_2 b_3 b_4}\, \varphi^i(b_4 b_3 c\,|\,a)$$

$$= \left(W^{\pm}_{a_1 a_2 b_3 b_4} - W^{\pm}_{a_2 a_1 b_3 b_4}\right) \varphi^i(b_4 b_3 a_3\,|\,a)$$

$$- \left(W^{\pm}_{a_1 a_3 b_3 b_4} - W^{\pm}_{a_3 a_1 b_3 b_4}\right) \varphi^i(b_4 b_3 a_2\,|\,a)$$

$$+ \left(W^{\pm}_{a_2 a_3 b_3 b_4} - W^{\pm}_{a_3 a_2 b_3 b_4}\right) \varphi^i(b_4 b_3 a_1\,|\,a)$$

Andererseits ist wegen (3.35), (2.44), (1.26)

$$W^{\pm}_{a_1 a_2 a_3 a_4} = 2\xi_1 (G^o \hat{V})_{a_1 a a_3 a_4}\, F^{\pm}_{a a_2} \tag{5.24}$$

$$= 2f\xi_1 \int d^3x \Big\{ \delta(\vec{x}_1 - \vec{x})\, \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)\, \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_4) \cdot$$

$$\cdot \Big(-\gamma^o_{\alpha_1 \alpha}\, C^{-1}_{\alpha_3 \alpha_4}\, \delta_{\Gamma_1 \Gamma}\, \tfrac{1}{2} (\sigma^1 - i\sigma^2)_{\Gamma_3 \Gamma_4} + \gamma^o_{\alpha_1 \alpha_3}\, C^{-1}_{\alpha \alpha_4}\, \delta_{\Gamma_1 \Gamma_3}\, \tfrac{1}{2} (\sigma^1 - i\sigma^2)_{\Gamma \Gamma_4}$$

$$+ \gamma^o_{\alpha_1 \alpha_4}\, C^{-1}_{\alpha_3 \alpha}\, \delta_{\Gamma_1 \Gamma_4}\, \tfrac{1}{2} (\sigma^1 - i\sigma^2)_{\Gamma_3 \Gamma} \Big) \cdot \sigma^1_{\Gamma \Gamma_2}\, F^{\pm}_{\alpha \alpha_2}(\vec{x} - \vec{x}_2) \Big\}$$

wobei $F^{\pm}_{\alpha\alpha_2}(\vec{x}-\vec{x}_2)$ in (A.27) definiert ist. Der Superspinindex wurde gegenüber (1.26) kompakter durch die Paulimatrizen ausgedrückt. Ausmultiplikation der Superspinindizes und Integration über d^3x ergibt:

$$W^{\pm}_{a_1a_2a_3a_4} = 2f\xi_1\,\delta(\vec{x}_1-\vec{x}_3)\,\delta(\vec{x}_1-\vec{x}_4)\cdot \tag{5.25}$$

$$\cdot\Big(\gamma^0_{\alpha_1\alpha}\,F^{\pm}_{\alpha\alpha_2}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\,C_{\alpha_3\alpha_4}\,\sigma^1_{\Gamma_1\Gamma_2}\,\tfrac{1}{2}(\sigma^1-i\sigma^2)_{\Gamma_3\Gamma_4}$$

$$+\,\gamma^0_{\alpha_1\alpha_3}\,C_{\alpha_4\alpha}\,F^{\pm}_{\alpha\alpha_2}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\,\delta_{\Gamma_1\Gamma_3}\,\tfrac{1}{2}(\delta+\sigma^3)_{\Gamma_2\Gamma_4}$$

$$-\,\gamma^0_{\alpha_1\alpha_4}\,C_{\alpha_3\alpha}\,F^{\pm}_{\alpha\alpha_2}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\,\delta_{\Gamma_1\Gamma_4}\,\tfrac{1}{2}(\delta-\sigma^3)_{\Gamma_2\Gamma_3}\Big)$$

Spezialisiert man den Superspinindex im Wechselwirkungsterm

$$\left(C^a W^{\pm}\varphi^i\right)_{a_1a_2a_3} = \left(C^a W^{\pm}\varphi^i\right)^{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\,|a) \tag{5.26}$$

auf den von uns gewählten Sektor $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma_3=1$, so erkennt man, daß von (5.25) nur der Summand $\sim \delta_{\Gamma_1\Gamma_3}\,\frac{1}{2}\,(\delta+\sigma^3)_{\Gamma_2\Gamma_4}$ von Null verschieden ist. Außerdem enthält der Wechselwirkungsteil keine Terme, welche den Superspinindex mischen. Es ergeben sich gemäß (5.23) folgende sechs Summanden

$$\left(C^a W^{\pm}\varphi^i\right)_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\,|a) \tag{5.27}$$

$$= 2f\xi_1\Big\{\gamma^0_{\alpha_1\beta_3}\left(C\mathcal{F}^{\pm}\right)_{\beta_4\alpha_2}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\,\delta_{\alpha_3\beta}\,\varphi^i\big(\vec{x}_1\vec{x}_2\vec{x}_3\,|a\big)_{\beta_4\beta_3\beta} - \left(C\mathcal{F}^{\pm}\right)_{\beta_4\alpha_1}(\vec{x}_2-\vec{x}_1)\,\gamma^0_{\alpha_2\beta_3}\,\delta_{\alpha_3\beta}\,\varphi^i\big(\vec{x}_2\vec{x}_2\vec{x}_3\,|a\big)_{\beta_4\beta_3\beta}$$

$$-\,\gamma^0_{\alpha_1\beta_3}\,\delta_{\alpha_2\beta}\left(C\mathcal{F}^{\pm}\right)_{\beta_4\alpha_3}(\vec{x}_1-\vec{x}_3)\,\varphi^i\big(\vec{x}_1\vec{x}_1\vec{x}_2\,|a\big)_{\beta_4\beta_3\beta} + \left(C\mathcal{F}^{\pm}\right)_{\beta_4\alpha_1}(\vec{x}_3-\vec{x}_1)\,\delta_{\alpha_2\beta_3}\,\gamma^0_{\alpha_3\beta}\,\varphi^i\big(\vec{x}_3\vec{x}_3\vec{x}_2\,|a\big)_{\beta_4\beta_3\beta}$$

$$+\,\delta_{\alpha_1\beta}\,\gamma^0_{\alpha_2\beta_3}\left(C\mathcal{F}^{\pm}\right)_{\beta_4\alpha_3}(\vec{x}_2-\vec{x}_3)\,\varphi^i\big(\vec{x}_2\vec{x}_2\vec{x}_1\,|a\big)_{\beta_4\beta_3\beta} - \delta_{\alpha_1\beta}\left(C\mathcal{F}^{\pm}\right)_{\beta_4\alpha_2}(\vec{x}_3-\vec{x}_2)\,\gamma^0_{\alpha_3\beta_3}\,\varphi^i\big(\vec{x}_3\vec{x}_3\vec{x}_1\,|a\big)_{\beta_4\beta_3\beta}\Big\}$$

Im nächsten Schritt setzen wir in (5.27) die Entwicklung (5.2), der φ^i, i=1,...,6, nach den Diracspinoren ein, ersetzen

$$F^{\pm}_{\alpha\beta}(\vec{x}-\vec{y}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3q\, F^{\pm}_{\alpha\beta}(\vec{q})\, e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})} \tag{5.28}$$

und bilden dann die Fouriertransformierte des ganzen Ausdrucks. Für den ersten Term von (5.27) ergibt sich

$$\mathcal{F}\left[2\xi_1 f\, \gamma^0_{\alpha_1\beta_3}\, (CF^{\pm})_{\beta_4\alpha_2}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\, \varphi^i\begin{pmatrix}\vec{x}_4\vec{x}_1\vec{x}_3\\ \beta_4\beta_3\alpha_3\end{pmatrix}\right](\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3) \tag{5.29}$$

$$= (2\pi)^{-9/2}\int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3\, e^{-i\vec{k}_i\vec{x}_i}\left\{2f\xi_1\,\gamma^0_{\alpha_1\beta_3}(2\pi)^{-3/2}\int d^3q\,(CF^{\pm})_{\beta_4\alpha_2}(q)\, e^{i\vec{q}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}\right\}\cdot$$

$$\cdot(2\pi)^{-9/2}\int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3\, \tilde{\varphi}^i_{s_1s_2s_3}(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3|a)\, e^{i(\vec{x}_4\vec{p}_1+\vec{x}_4\vec{p}_2+\vec{x}_3\vec{p}_3)}\, u_{\beta_4}(s_1\vec{p}_1)\, u_{\beta_5}(s_2\vec{p}_2)\, u_{\alpha_3}(s_3\vec{p}_3)$$

$$= (2\pi)^{-2\cdot 3/2}\int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3q\, \tilde{\varphi}^i_{s_1s_2s_3}(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3|a)\cdot 2f\xi_1\,\gamma^0_{\alpha_1\beta_3}\, C_{\beta_4\varepsilon}\, F^{\pm}_{\varepsilon\alpha_2}(\vec{q})\cdot$$

$$\cdot u_{\beta_4}(s_1\vec{p}_1)\, u_{\beta_3}(s_2\vec{p}_2)\, u_{\alpha_3}(s_3\vec{p}_3)\int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3\, e^{-i\{\vec{x}_1(\vec{k}_1-\vec{q}-\vec{p}_1-\vec{p}_2)+\vec{x}_2(\vec{k}_2+\vec{q})+\vec{x}_3(\vec{k}_3-\vec{p}_3)\}}$$

$$= (2\pi)^{-3/2}\int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3\, \tilde{\varphi}^i_{s_1s_2s_3}(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3|a)\,\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{p}_1-\vec{p}_2)\,\delta(\vec{k}_3-\vec{p}_3)\cdot$$

$$\cdot 2f\xi_1\,\gamma^0_{\alpha_1\beta_3}\, C_{\beta_4\varepsilon}\, F^{\pm}_{\varepsilon\alpha_2}(-\vec{k}_2)\, u_{\beta_4}(s_1\vec{p}_1)\, u_{\beta_3}(s_2\vec{p}_2)\, u_{\alpha_3}(s_3\vec{p}_3)$$

Projektion mit (5.5) ergibt aus (5.29)

$$\mathrm{Proj}\left[2f\xi_1\,\gamma^0_{\alpha_1\beta_3}\,(CF^{\pm})_{\beta_4\alpha_2}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\,\varphi^{i}_{\beta_4\beta_3\alpha_3}(\vec{x}_1\vec{x}_1\vec{x}_3|a)\right]_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3) \qquad (5.30)$$

$$= (2\pi)^{-3/2}\int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3\;\tilde{\varphi}^{i}_{s_1s_2s_3}(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3|a)\;\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{p}_1-\vec{p}_2)\;\delta(\vec{k}_3-\vec{p}_3)\cdot$$

$$\cdot\,2f\xi_1\left[\bar{u}_{\alpha_1}(\sigma_1\vec{k}_1)u_{\alpha_1}(s_2\vec{p}_2)\cdot u^{+}_{\alpha_2}(\sigma_2\vec{k}_2)\,C_{\beta_4\varepsilon}F^{\pm}_{\varepsilon\alpha_2}(-\vec{k}_2)\,u_{\beta_4}(s_1\vec{p}_1)\cdot u^{+}_{\alpha_3}(\sigma_3\vec{k}_3)u_{\alpha_3}(s_3\vec{p}_3)\right]$$

$$= (2\pi)^{-3/2}2f\xi_1\int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3\;\tilde{\varphi}^{i}_{s_1s_2s_3}(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3|a)\cdot\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{p}_1-\vec{p}_2)\delta(\vec{k}_3-\vec{p}_3)\cdot$$

$$\cdot\,\mathcal{U}^{2}_{\sigma_1s_2}(\vec{k}_1\vec{p}_2)\cdot\mathcal{U}^{\pm}_{\sigma_2s_1}(\vec{k}_2\vec{p}_1)\cdot\mathcal{U}^{1}_{\sigma_3s_3}(\vec{k}_3\vec{p}_3)$$

wobei

$$\mathcal{U}^{1}_{\sigma s}(\vec{k}\vec{p}) := u^{+}_{\alpha}(\sigma,\vec{k})\,u_{\alpha}(s,\vec{p}) \qquad (5.31)$$

$$\mathcal{U}^{2}_{\sigma s}(\vec{k}\vec{p}) := \bar{u}_{\alpha}(\sigma,\vec{k})\,u_{\alpha}(s,\vec{p}) \qquad (5.32)$$

$$\mathcal{U}^{\pm}_{\sigma s}(\vec{k}\vec{p}) := u_{\beta_4}(s,\vec{p})\,C_{\beta_4\varepsilon}F^{\pm}_{\varepsilon\alpha_2}(-\vec{k})\,u^{+}_{\alpha_2}(\sigma\vec{k}) \qquad (5.33)$$

Ersetzen wir in (5.30)

$$\mathcal{U}^{1}_{\sigma s}(\vec{k}\vec{p})\,\delta(\vec{k}-\vec{p}) = \mathcal{U}^{1}_{\sigma s}(\vec{k},\vec{k})\,\delta(\vec{k}-\vec{p})$$

$$= \delta_{\sigma s}\,\delta(\vec{k}-\vec{p}) \qquad (5.34)$$

(wobei wir (5.9) ausgenutzt haben), und gehen wir mit den fünf weiteren Termen analog vor, so erhalten wir insgesamt:

$$\text{Proj}\left[C^a W^{\pm} \varphi^i\right]_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a)$$

$$= (2\pi)^{-3/2} 2f\xi_1 \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 \, \tilde{\varphi}^i_{s_1s_2s_3}(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3|a) \cdot \tag{5.35}$$

$$\Big\{ + \big(u^2_{\sigma_1 s_2}(\vec{k}_1\vec{p}_2)\, u^{\pm}_{\sigma_2 s_1}(\vec{k}_2\vec{p}_1)$$

$$- u^{\pm}_{\sigma_1 s_1}(\vec{k}_1\vec{p}_1)\, u^2_{\sigma_2 s_2}(\vec{k}_2\vec{p}_2)\big)\, \delta_{\sigma_3 s_3}\ \delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{p}_1-\vec{p}_2)\,\delta(\vec{k}_3-\vec{p}_3)$$

$$- \big(u^2_{\sigma_1 s_1}(\vec{k}_1\vec{p}_1)\, u^{\pm}_{\sigma_3 s_1}(\vec{k}_3\vec{p}_1)$$

$$- u^{\pm}_{\sigma_2 s_2}(\vec{k}_2\vec{p}_2)\, u^2_{\sigma_3 s_2}(\vec{k}_3\vec{p}_2)\big)\, \delta_{\sigma_2 s_3}\ \delta(\vec{k}_1+\vec{k}_3-\vec{p}_1-\vec{p}_2)\,\delta(\vec{k}_2-\vec{p}_3)$$

$$+ \big(u^2_{\sigma_2 s_2}(\vec{k}_2\vec{p}_2)\, u^{\pm}_{\sigma_3 s_1}(\vec{k}_3\vec{p}_1)$$

$$- u^{\pm}_{\sigma_2 s_1}(\vec{k}_2\vec{p}_1)\, u^2_{\sigma_3 s_2}(\vec{k}_3\vec{p}_2)\big)\, \delta_{\sigma_1 s_3}\, \delta(\vec{k}_2+\vec{k}_3-\vec{p}_1-\vec{p}_2)\,\delta(\vec{k}_1-\vec{p}_3)\Big\}$$

$$=: \cdot (2\pi)^{-3/2} 2f\xi_1 \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3\, \mathcal{F}^{\pm}_{\substack{\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ s_1s_2s_3}}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3)\, \tilde{\varphi}^i_{s_1s_2s_3}(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3|a) \tag{5.36}$$

Dabei gilt gemäß Anhang (B.33), (B.34):

$$u^2_{\sigma s}(\vec{k},\vec{p}) = N_p N_k \left[\left(1 - \frac{\vec{k}\vec{p}}{(E_p+M)(E_k+M)}\right)\delta_{\sigma s} - \frac{i\,\vec{\sigma}_{\sigma s}\cdot(\vec{k}\times\vec{p})}{(E_p+M)(E_k+M)} \right] \tag{5.37}$$

$$\mathcal{U}^{\pm}_{\sigma s}(\vec{k}\vec{p}) = N_p N_k \Big[\Big(\frac{\vec{k}^2}{E_k+M} - \frac{\vec{k}\vec{p}}{E_p+M} \Big) \delta_{\sigma s} \tilde{A}^{\pm}(-\vec{k}) - \frac{i\vec{\sigma}_{\sigma s}(\vec{k}\times\vec{p})}{E_p+M} \tilde{A}^{\pm}(-\vec{k}) + \Big(1 + \frac{\vec{k}\vec{p}}{(E_p+M)(E_k+M)} \Big) \delta_{\sigma s} \tilde{B}^{\pm}(-\vec{k}) + \frac{i\vec{\sigma}_{\sigma s}(\vec{k}\times\vec{p})}{(E_p+M)(E_k+M)} \tilde{B}^{\pm}(-\vec{k}) \Big] \quad (5.38)$$

wobei

$$N_p = \Big(\frac{E_p+M}{2E_p} \Big)^{1/2} \quad (5.39)$$

Die Funktionen $\tilde{A}^{\pm}(-\vec{k})$, $\tilde{B}^{\pm}(-\vec{k})$ sind im Anhang (A.31) und (A.32) definiert.

3. Niederenergielimes: Diagonalisierung von $W^{\pm}$

Um die Abhängigkeit von (5.36) vom Schwerpunktsimpuls untersuchen zu können, gehen wir zu Jacobikoordinaten über. Diese lassen sich über die Darstellung der S(3) durch Permutationsmatrizen definieren [32]. Die Permutationsmatrizen geben das Transformationsverhalten eines Spaltenvektors $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)^T$ unter Permutationen an:

$$g\,\vec{x}_i = \tilde{D}_{ik}(g)\,\vec{x}_k \quad (5.40)$$

wobei die $\tilde{D}_{ik}(g)$ gegeben sind durch

$g \in S(3)$	e	(12)(3)	(13)	(23)	(123)	(132)
$\tilde{D}_{ik}(g)$	100 010 001	010 100 001	001 010 100	100 001 010	010 001 100	001 100 010

(5.41)

Nun kann man zeigen, daß Linearkombinationen $\hat{\vec{x}}_1,\hat{\vec{x}}_2,\hat{\vec{x}}_3$ der $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$:

$$\hat{\vec{x}}_i = A_{ik}\,\vec{x}_k \quad (5.42)$$

wobei

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & -2^{-1/2} & 0 \\ 6^{-1/2} & 6^{-1/2} & -(\frac{2}{3})^{1/2} \\ 3^{-1/2} & 3^{-1/2} & 3^{-1/2} \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

$$\det A = 1 \tag{5.44}$$

$$A^{-1} = A^T \tag{5.45}$$

die Darstellung $\tilde{D}_{ik}(g)$ reduzieren, d.h. es gilt

$$A \tilde{D}(g) A^{-1} = \begin{pmatrix} D^{\gamma}(g) & 0 \\ 0 & D^{S}(g) \end{pmatrix} \tag{5.46}$$

$D^{\gamma}(g)$ und $D^{S}(g)$ sind durch (4.22) gegeben.

Explizit lauten die Jacobikoordinaten

$$\hat{\vec{x}}_1 = 2^{-1/2} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \tag{5.47}$$

$$\hat{\vec{x}}_2 = 6^{-1/2} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3) \tag{5.48}$$

$$\hat{\vec{x}}_3 = 3^{-1/2} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3) \tag{5.49}$$

Wegen $\vec{p}_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i}$ ergibt sich für die Impulse

$$\hat{\vec{p}}_i = (A^{-1})^T_{ik} \vec{p}_k = A_{ik} \vec{p}_k \tag{5.50}$$

Für die Umkehrung folgt mit A^T:

$$\vec{p}_1 = 2^{-1/2} \hat{\vec{p}}_1 + 6^{-1/2} \hat{\vec{p}}_2 + 3^{-1/2} \hat{\vec{p}}_3 \tag{5.51}$$

$$\vec{p}_2 = -2^{-1/2}\,\hat{\vec{p}}_1 + 6^{-1/2}\,\hat{\vec{p}}_2 + 3^{-1/2}\,\hat{\vec{p}}_3$$

$$\vec{p}_3 = -2\cdot 6^{-1/2}\,\hat{\vec{p}}_2 + 3^{-1/2}\,\hat{\vec{p}}_3 \qquad (5.51)$$

Hierbei entspricht $\hat{\vec{x}}_3$ bzw. $\hat{\vec{p}}_3$ dem Schwerpunktsvektor bzw. Schwerpunktsimpuls. Dieser gehört zur irreduziblen Darstellung $D^S(g)$ der S(3), während $\hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2$ zur zweidimensionalen Darstellung D^γ gehören.

Wegen $A^{-1} = A^T$ gilt schließlich

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{x}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{3} \hat{\vec{x}}_i^{\,2} \qquad (5.52)$$

Die Funktionen $\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a)$ drücken wir nun durch Jacobikoordinaten aus. Wir nehmen an, daß sich der Schwerpunkt des Dreiteilchensystems geradlinig gleichförmig bewegt. Daher machen wir den Ansatz

$$\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3|a) \longrightarrow \qquad (5.53)$$

$$\hat{\tilde{\varphi}}^{i}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\hat{\vec{k}}_1\hat{\vec{k}}_2\hat{\vec{k}}_3|a) = \hat{\tilde{\varphi}}^{i}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\hat{\vec{k}}_1\hat{\vec{k}}_2|a)\,\delta(\hat{\vec{k}}_3 - \vec{P}_S)$$

Unter dem Niederenergielimes wollen wir folgendes verstehen:

— $$|\vec{P}_S| \longrightarrow 0$$

wobei $\vec{P}_S$ der Schwerpunktsimpuls des Bindungszustandes ist;

— $$\lim_{\hat{k}_1,\hat{k}_2\to\infty} \hat{\tilde{\varphi}}^{i}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\hat{\vec{k}}_1\hat{\vec{k}}_2|a) = 0 \qquad (5.54)$$

wobei $\varphi^{i}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\hat{\vec{k}}_1,\hat{\vec{k}}_2|a)$ nur von den Relativimpulsen $\hat{\vec{k}}_1,\hat{\vec{k}}_2$ abhängen;

— $$M >> |\hat{\vec{k}}_i|\,, \quad i = 1,2$$
$$M >> \Delta m \qquad (5.55)$$

wobei $M=\frac{1}{2}(m_1+m_2)$ und $\Delta m = m_1-m_2$ sind. Die Näherung (5.55) stimmt mit derjenigen von anderen Arbeiten [14,19] überein.

Um die Wechselwirkungsterme in dieser Näherung darzustellen, betrachten wir zunächst den ersten Term von (5.35) in Jacobikoordinaten. Damit die Formeln übersichtlich bleiben, setzen wir nicht in allen Termen die Transformation (5.51) explizit ein. Die Funktionaldeterminante der Jacobitransformation ist eins. Damit folgt

$$\mathrm{Proj}\,[C^a W^{\pm}\varphi^i]_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\hat{\vec{k}}_1\hat{\vec{k}}_2\hat{\vec{k}}_3|a)$$

$$= (2\pi)^{-3/2}\, 2f\,\Delta m^{-1}\int d^3\hat{p}_1\, d^3\hat{p}_2\, d^3\hat{p}_3\;\hat{\varphi}^i_{s_1s_2s_3}(\hat{\vec{p}}_1\hat{\vec{p}}_2\hat{\vec{p}}_3|a)\cdot \tag{5.57}$$

$$\cdot\left[\mathcal{U}^2_{\sigma_1 s_2}(\vec{k}_1,\vec{p}_2)\,\mathcal{U}^{\pm}_{\sigma_2 s_1}(\vec{k}_2,\vec{p}_1) - \mathcal{U}^{\pm}_{\sigma_1 s_1}(\vec{k}_1,\vec{p}_1)\,\mathcal{U}^2_{\sigma_2 s_2}(\vec{k}_2,\vec{p}_2)\right]\delta_{\sigma_3 s_3}\cdot$$

$$\cdot\,\delta\left(\tfrac{2}{\sqrt{6}}\hat{\vec{k}}_2+\tfrac{2}{\sqrt{3}}\hat{\vec{k}}_3-\tfrac{2}{\sqrt{6}}\hat{\vec{p}}_2-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\hat{\vec{p}}_3\right)\delta\left(-\tfrac{2}{\sqrt{6}}\hat{\vec{k}}_2+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\hat{\vec{k}}_3+\tfrac{2}{\sqrt{6}}\hat{\vec{p}}_2-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\hat{\vec{p}}_3\right)$$

Integration über $d^3\hat{\vec{p}}_2$ liefert für die δ-Funktion

$$\delta\left(\tfrac{3}{\sqrt{3}}\hat{\vec{k}}_3-\tfrac{3}{\sqrt{3}}\hat{\vec{p}}_3\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\delta(\hat{\vec{k}}_3-\hat{\vec{p}}_3)$$

Für $\vec{p}_2$ folgt

$$\vec{p}_2 = -2^{-1/2}\hat{\vec{p}}_1 + 6^{-1/2}\hat{\vec{p}}_2 + 3^{-1/2}\hat{\vec{p}}_3 \tag{5.58}$$

$$= -2^{-1/2}\hat{\vec{p}}_1 + 6^{-1/2}\hat{\vec{k}}_2 - 2^{-1}3^{-1/2}(\hat{\vec{k}}_3-\hat{\vec{p}}_3)$$

Für $\vec{p}_1$ folgt analog

$$\vec{p}_1 = 2^{-1/2}\hat{\vec{p}}_1 + 6^{-1/2}\hat{\vec{k}}_2 - 2^{-1}3^{-1/2}(\hat{\vec{k}}_3-\hat{\vec{p}}_3) \tag{5.59}$$

Integration in (5.57) über $d^3\hat{p}_3$ gibt

$$\mathrm{Proj}\left[C^a W^{\pm} \hat{\varphi}^i\right]_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\hat{k}_1 \hat{k}_2 \hat{k}_3 | a)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{f}{\Delta m} \int d^3\hat{p}_1 \; \hat{\tilde{\varphi}}^i_{s_1 s_2 s_3}(\hat{\tilde{p}}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3 | a) \cdot \tag{5.60}$$

$$\cdot \left[U^2_{\sigma_1 s_2}(\vec{k}_1 \vec{q}_2)\, U^{\pm}_{\sigma_2 s_1}(\vec{k}_2 q_1) - U^{\pm}_{\sigma_1 s_1}(\vec{k}_1 \vec{q}_1) U^2_{\sigma_2 s_2}(\vec{k}_2 \vec{q}_2)\right] \delta_{\sigma_3 s_3}$$

wobei

$$\vec{q}_2 := -2^{-1/2}\hat{\tilde{p}}_1 + 6^{-1/2}\hat{k}_2 + 3^{-1/2}\hat{k}_3 \tag{5.61}$$

$$q_1 := +2^{-1/2}\hat{\tilde{p}}_1 + 6^{-1/2}\hat{k}_2 + 3^{-1/2}\hat{k}_3 \tag{5.62}$$

Ähnliche Rechnungen führen auf die beiden weiteren Terme.

Mit dem Ansatz (5.53)

$$\hat{\tilde{\varphi}}^i_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\hat{\tilde{p}}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3 | a) = \hat{\tilde{\varphi}}^i_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\hat{\tilde{p}}_1, \hat{k}_2 | a)\, \delta(\hat{k}_3 - \vec{P}_S)$$

läßt sich die Schwerpunktsbewegung aus den Funktionen herausziehen. Der Schwerpunktsimpuls $\vec{P}_S = \hat{k}_3$ geht in das Integral (5.60) lediglich als Parameter ein. Die Abhängigkeit des Integralkerns von $\vec{P}_S$ ergibt sich aus der von $U^{\pm}$ und U^2.

Aus Anhang (B.42) und (B.43) folgt

$$\lim_{\hat{k}_3 \to 0} U^+_{\sigma s}(\vec{k}_i, \vec{q}_j) = \delta_{\sigma s}\, \hat{k}_3^2 \left[4\Delta m (m_2^2 - m_1^2)\right]^{-1} \tag{5.63}$$

$$\lim_{\hat{k}_3 \to 0} U^-_{\sigma s}(\vec{k}_i, \vec{q}_j) = \delta_{\sigma s}\, \Delta m^{-1} \tag{5.64}$$

Setzen wir diese Näherung in (5.60) ein, so erhalten wir

$$\lim_{|\hat{k}_3|\to 0} \quad \mathrm{Proj}\left[C^a W^{\pm} \hat{\bar{\varphi}}^i\right]_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(\hat{k}_1\hat{k}_2\hat{k}_3|a) \tag{5.65}$$

$$= \alpha^{\pm}(\hat{k}_3)\,\delta(\hat{k}_3-\vec{P}_5)\cdot\int d^3\hat{p}_1\; b\,(C^a)^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}_{s_1s_2s_3}\,\hat{\bar{\varphi}}^i_{s_1s_2s_3}(\hat{p}_1\hat{k}_1\hat{k}_2|a)$$

wobei

$$\alpha^{+}(\hat{k}_3) = \frac{f}{\Delta m}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3(2\pi)^{3/2}}\,\frac{\hat{k}_3^2}{4\Delta m(m_2^2-m_1^2)} \tag{5.66}$$

$$\alpha^{-}(\hat{k}_3) = \frac{f}{\Delta m}\,\frac{2\sqrt{3}}{3(2\pi)^{3/2}}\,\frac{1}{\Delta m} \tag{5.67}$$

Das Integral über die $\hat{\bar{\varphi}}^i$ in (5.65) ist wegen der Niederenergieannahmen beschränkt.

In (5.65) kann der Index i an den Feldern prinzipiell sechs Werte annehmen gemäß (4.124) - (4.127) und (5.20), (5.21). In den Gleichungen (4.119) - (4.122) treten in den Wechselwirkungstermen nur die Felder

$$\varphi^1,\ \varphi^4,\ \varphi^5,\ \varphi^6 \tag{5.68}$$

auf. Dabei ist

$$\varphi^1(a_1a_2a_3|a) = (C^a)^{a_1a_2a_3}_{b_1b_2b_3}\,\bar{\varphi}(\hat{b}_1^{\,1}\hat{b}_2^{\,1}\hat{b}_3^{\,1}|a) \tag{4.124}$$

wobei für den Indexsatz gilt

$$(a_1a_2a_3) = \begin{pmatrix} \vec{\varkappa}_1\vec{\varkappa}_2\vec{\varkappa}_3 \\ P_1P_2P_3 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{pmatrix} \tag{5.69}$$

Die Spezialisierung auf $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ bedeutet eine Symmetrisierung im Raum der Superindizes. Der Indexsatz reduziert sich auf

$$(a_1 a_2 a_3) \quad = \quad \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \end{pmatrix} \tag{5.70}$$

Die Entwicklung (5.2) nach Produkten von Diracspinoren erhält die Symmetrieeigenschaften der Funktionen φ^i. Der Obergang $\varphi^i \to \hat{\tilde{\varphi}}^i$ widerspiegelt sich in dem Obergang des Indexsatzes

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3 \\ s_1 s_2 s_3 \end{pmatrix} \tag{5.71}$$

Die Forderungen (5.54), (5.55) des Niederenergielimes bedeuten eine näherungsweise Symmetrisierung in den Impulskoordinaten. Daher bleibt in (5.65) ein Operator der totalen Antisymmetrie $(C^a)_{\substack{\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ s_1 s_2 s_3}}$ übrig.

Wegen $C^a \cdot C^a = C^a$ ändert sich für i=1 an (5.65) nichts. Analoges gilt für i=4.

Anders verhält es sich für die Terme

$$\varphi^5(a_1 a_2 a_3 | a) \quad = \quad \left(C^{\gamma}_{11}\right)_{\substack{a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3}} \bar{\varphi}^{\gamma\,112}_{22}(b_1 b_2 b_3 | a) \tag{5.20}$$

$$\varphi^6(a_1 a_2 a_3 | a) \quad = \quad \left(C^{\gamma}_{21}\right)_{\substack{a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3}} \bar{\varphi}^{\gamma\,112}_{12}(b_1 b_2 b_3 | a) \tag{5.21}$$

Setzt man in (5.65) i=5,6 ein, so verschwinden diese Terme wegen $C^a \cdot C^\gamma = 0$. Für i=5,6 stellt aber (5.65) genau die Kopplungsterme in (4.119) - (4.122) dar. Damit ist gezeigt, daß in dem Niederenergielimes diese Terme verschwinden.

Oben haben wir festgestellt, daß sich - durch die Symmetrieannahme unseres Beispiels bedingt - der Operator der totalen Antisymmetrie in allen Indizes $(C^a)_{\substack{K_1 K_2 K_3 \\ I_1 I_2 I_3}}$ auf den Operator der totalen Antisymmetrie in den Spinindizes $(C^a)_{\substack{\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ s_1 s_2 s_3}}$ reduziert. In unserem Modell beschreiben die Funktionen φ^i, i=1,...,6, Bindungszustände von 3 Spin 1/2-Teilchen. Da der Spin eines solchen Teilchens nur zwei Zustände annehmen kann, ist aus kombinatorischen Gründen ein Dreiteilchenzustand, der in den Spinindizes total antisymmetrisch ist (wie in (5.65) gefordert), nicht möglich; es ist:

$$(C^a)_{\substack{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\\ \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}} \equiv 0 \tag{5.72}$$

Dieses Problem besteht jedoch nur wegen der Einschränkungen, die wir dieser Arbeit und speziell diesem Kapitel zugrundegelegt haben. Da wir uns auf die Auswirkung der lokalen Selbstwechselwirkung der Spin 1/2-Teilchen auf Bindungszustände beschränkten, haben wir ganz zu Beginn der Arbeit den Isospinindex A der Feldoperatoren $R_A(x)$; A=1,2, vernachlässigt. Nimmt man diesen Freiheitsgrad auf, wie das in[10,34] geschehen ist, so läßt sich in dem erweiterten Spin-Isospinraum der Projektionsoperator C^a konstruieren.

Eine Einschränkung, die speziell dieses Kapitel 5 betrifft, ist die Symmetrisierung des Superspins durch

$$(\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3) = (1\,1\,1)$$

Setzen wir in (5.1) eines (oder zwei) der Γ_i, i=1,2,3, gleich zwei, so sind auch gemischtsymmetrische Kombinationen im Superspin möglich. In der Entwicklung (5.2) ergibt sich dann für die Komponenten mit Γ=2 die Substitution

$$u_\alpha(s\vec{p})\, e^{i\vec{x}\vec{p}} \longrightarrow v^c_\alpha(s\vec{p})\, e^{-i\vec{x}\vec{p}} \tag{5.73}$$

Zur Definition von v^c vergleiche Anhang B.

Anstatt mit $u^+_\alpha(\sigma,\vec{p})$ projiziert man dann mit $v^{c+}_\alpha(\sigma,\vec{p})$. Wegen

$$v^{c+}_\alpha(\sigma\vec{k})\, v^c_\alpha(s\vec{k}) = \delta_{\sigma s} \tag{5.74}$$

$$v^{c+}_\alpha(\sigma\vec{k})\, \gamma^0_{\alpha\beta}\, v^c_\beta(s\vec{k}) = M\varepsilon^{-1}_k\, \delta_{\sigma s} \tag{5.75}$$

$$v^{c+}_\alpha(\sigma\vec{k})\, \gamma^0_{\alpha\alpha'}(-\vec{\gamma}\vec{k}+M)_{\alpha'\beta}\, v^c_\beta(s\vec{k}) = E_k\, \delta_{\sigma s} \tag{5.76}$$

ändert sich an der Gleichung (5.15) und speziell an dem Massenoperator (5.16) nichts. Er läßt sich genauso invertieren wie im symmetrischen Fall. Lediglich im Wechselwirkungsterm tragen aufgrund der Superspinkombinationen in (5.25) andere Summanden bei. Man kann daher auch im Spin-Superspinraum eine total antisymmetrische Kombination erzeugen.

Insgesamt kann man feststellen, daß es prinzipiell mehrere Möglichkeiten gibt, die Freiheitsgrade gegenüber den hier getroffenen Einschränkungen zu vergrößern. Führt man den Niederenergielimes durch, symmetrisiert also im Koordinatenraum, so verbleiben neben den Spinfreiheitsgraden noch die Superspin- und Isospinfreiheitsgrade, um die totale Antisymmetrie der Funktionen (5.1) zu gewährleisten.

4. Niderenergielimes: Selbstkonsistenz

In den verangegangenen Abschnitten 5.1 - 5.3 haben wir sichergestellt, daß der Auflöseformalismus, wie er in den Abschnitten 4.4 und 4.5 beschrieben wurde, zumindest in der Niederenergienäherung gültig ist. Wir wollen zum Schluß noch zeigen, daß die aufgelöste Gleichung für φ^1 in dieser Näherung konsistent ist mit der Annahme (5.54) und daß auch das Skalarprodukt die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Dazu formulieren wir die Operatoren Z und M in dieser Näherung. Wegen

$$E_{k_1}^{-1} = (\vec{k}_1^2 + M^2)^{-1/2} = \left[\left(2^{-1/2} \hat{\vec{k}}_1 + 6^{-1/2} \hat{\vec{k}}_2 + 3^{-1/2} \hat{\vec{k}}_3 \right)^2 + M^2 \right]^{-1/2} \quad (5.77)$$

folgt

$$\lim_{\hat{k}_3 \to 0} E_{k_1}^{-1} = M^{-1} \quad (5.78)$$

Analoges gilt für $E_{k_2}^{-1}$ und $E_{k_3}^{-1}$. Damit ergibt sich für den Massenoperator (5.16):

$$\lim_{\hat{k}_3 \to 0} M(\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3) = 3/2 \, \Delta m \quad (5.79)$$

In Z ist der Energieeigenwert E des Bindungszustandes enthalten:

$$E = \left[m_B^2 + (\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3)^2 \right]^{1/2} \quad (5.80)$$

Wegen der starken Bindung der Konstituenten gilt für die Masse des Dreiteilchenzustandes m_B

$$m_B << M \quad (5.81)$$

Für Z folgt mit (5.12):

$$\lim_{\vec{k}_3 \to 0} Z(\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3) = -3M \tag{5.82}$$

Setzen wir in dieser Näherung

$$M^{-1} Z = Z M^{-1} = -2M \Delta m^{-1} =: \eta \tag{5.83}$$

so erhalten wir aus (4.165) - (4.167) formal:

$$\varphi^2 \approx \left({}^9\!/_2 \eta^3 - {}^7\!/_2 \eta - {}^5\!/_3 \eta \cdot \Delta m^{-1} \alpha^+(P_S) + {}^2\!/_3 \Delta m^{-1} \alpha^-(P_S) \right) \varphi^1 \tag{5.84}$$

$$\varphi^3 \approx \left({}^3\!/_2 \eta^2 - {}^1\!/_2 - {}^1\!/_3 \Delta m^{-1} \alpha^+(P_S) \right) \varphi^1 \tag{5.85}$$

$$\varphi^4 \approx \eta \varphi^1 \tag{5.86}$$

$\alpha^{\pm}(P_S)$ ist durch (5.66)(5.67) gegeben; in den Wechselwirkungstermen ist nach (5.65) zu integrieren.

Im Limes $P_S \to 0$ folgt für $\alpha^{\pm}(P_S)$:

$$\lim_{P_S \to 0} \alpha^+(P_S) = 0 \tag{5.87}$$

$$\lim_{P_S \to 0} \alpha^-(P_S) = f \Delta m^{-2} \tag{5.88}$$

Für

$$\eta \gg \Delta m^{-3} f \tag{5.89}$$

ergibt sich aus (5.84) - (5.86)

$$\varphi^2 = {}^9\!/_2 \eta^3 \varphi^1 \tag{5.90}$$

$$\varphi^3 = {}^3\!/_2 \eta^2 \varphi^1 \tag{5.91}$$

$$\varphi^4 = \eta \varphi^1 \tag{5.92}$$

Diese drei Gleichungen drücken die Selbstkonsistenz aus. Denn nehmen wir an, daß eine Lösung für die physikalische Funktion φ^1 existiert, welche für große Relativimpulse verschwindet, so gilt das aufgrund (5.89) - (5.92) in stärkerem Maße auch für die Funktionen φ^2, φ^3 und φ^4. Die Wechselwirkungsanteile $\alpha^{\pm}(P_s)$ enthalten nach (5.87)(5.88) keine divergenten Terme. Die Abhängigkeit der Gleichungen (5.90) - (5.92) von η entspricht genau den von Stumpf in [14] angegebenen Termen.

Berücksichtigt man für das Skalarprodukt in (4.171) ebenfalls nur die Terme $\sim\eta^3$, so folgt:

$$\langle a|a\rangle = \sigma^2 (18\eta^3)\,\varphi^1 \qquad (5.93)$$

$$= 18\eta^3 (\varphi^1)^+ \varphi^1$$

Da η^3 wegen (5.83) reell ist, gilt in dieser Näherung

$$\sigma^2 = (\varphi^1)^+ \qquad (5.94)$$

Daher ist die Norm des Zustandes $|a\rangle$ positiv definiert.

Zusammenfassung

Die Grundlage dieser Arbeit ist ein einheitliches nichtlineares Spinorfeldmodell mit Ableitungen zweiter Ordnung. In solchen Quantenfeldtheorien werden alle beobachtbaren Teilchen als Bindungszustände von elementaren Preonenfeldern betrachtet, während die Preonenfelder selbst nicht frei vorkommen. Das fundamentale Preonenfeld ist ein achtkomponentiges Spinor-Isospinor-Feld. Im Rahmen dieser Arbeit untersuchten wir die Auswirkung der nichtlinearen Wechselwirkung auf die Bindungszustände. Wir beschränkten uns auf einen Isospinfreiheitsgrad.

Um das Modell kanonisch quantisieren zu können, leiteten wir ein äquivalentes nichtlineares Spinorfeldgleichungssystem mit Ableitungen erster Ordnung ab. Dies führte zu Hilfsfeldfreiheitsgraden und zu indefiniter Matrik im Zustandsraum. Das Skalarprodukt konnten wir durch Produkte der τ-Funktionen mit den ρ-Funktionen ausdrücken und dadurch den expliziten Gebrauch des unbekannten metrischen Fundamentaltensors vermeiden.

Aus dem einheitlichen nichtlinearen Spinorfeldmodell konnten wir sodann mit Hilfe der funktionalen Quantentheorie ein Gleichungssystem für zusammengesetzte Teilchen ableiten. Indem wir uns auf den Diagonalteil dieses Energiegleichungssystems beschränkten, erhielten wir eine Eigenwertgleichung für den n-Teilchenbindungszustand. Die Norm eines solchen Bindungszustandes ließ sich ebenfalls im Funktionalraum formulieren und ergab sich als Produkt von Rechts- und Linkslösungen der Eigenwertgleichung.

Anschließend stellten wir die Eigenwertgleichung für $n=3$ explizit dar. Durch die Einführung der Hilfsfelder bedingt ist in der Eigenwertgleichung der Zusammenhang mit dem fundamentalen Preonenfeld nicht mehr erkennbar. Die Hilfsfelder mußten daher wieder aus der Eigenwertgleichung eliminiert werden. Dazu zerlegten wir die Operatoren und die Dreiteilchenfunktionen nach Darstellungen der S(3). Am Beispiel der leichter überschaubaren Zweiteilchenfunktionen und der S(2) ließ sich erkennen, daß die gesamte physikalische Information im Sektor der in den Hilfsfeldern symmetrischen Funktionen liegt. Hailer [19] und Hornung [20] zeigten, daß die Hilfsfelder eliminiert werden konnten; daraus resultierten Gleichungen für die physikalische Funktion sowie für das Skalarprodukt.

Im Dreiteilchensektor erreichten wir eine solche Entkopplung des symmetrischen Sektors nur näherungsweise. In dieser Näherung ließen sich jedoch

alle weiteren Rechnungen analog zum Zweiteilchenfall durchführen und wir leiteten entsprechende Gleichungen für die physikalische Dreiteilchenfunktion sowie für das Skalarprodukt ab.

Durch die Entwicklung der Dreiteilchenfunktionen nach freien Diracspinoren und durch die Auswahl eines speziellen Superspinsektors konnten wir beispielhaft zeigen, daß die Bedingungen, unter denen die physikalische Gleichung resultiert, prinzipiell erfüllbar sind. Die eine Bedingung war die Invertierung der Massenmatrix, die andere bezog sich auf die Entkopplung des symmetrischen Sektors. In der angegebenen Näherung konnten wir auch Resultate von Rechnungen, die Stumpf [14] durchgeführt hatte, bestätigen.

Nachdem das einheitliche nichtlineare Spinorfeldmodell sowohl in den Dissertationen [19, 20] als auch in der vorliegenden Arbeit strukturell behandelt wurde und eine vorläufige Fundierung erfahren hat, stehen zwei weiterführende Fragen im Raum.

Die erste Frage betrifft die Lösung der Energieeigenwertgleichung. Hailer [19] konnte im Zweiteilchensektor zu einem Zusammenhang des Energieeigenwertes mit den freien Parametern der Theorie kommen, weil der Integralkern der Energiegleichung vollständig separierte. Dies ist im Dreiteilchensektor nicht mehr der Fall. Hier müssen kernphysikalische Rechenverfahren angewendet werden.

Eine zweite Frage bezieht sich auf den Zusammenhang des einheitlichen nichtlinearen Spinorfeldmodells mit den "phänomenologischen Theorien", wie QCD, Weinberg-Salam-Theorie und eventuell auch einer Gravitationstheorie. Erste Schritte in diese Richtung wurden bereits unternommen. So konnte Stumpf [15] zeigen, daß sich aus einheitlichen nichtlinearen Spinorfeldtheorien eine Hierarchie von effektiven Wechselwirkungen auf der Ebene der Bindungszustände ableiten läßt. Die führenden Terme dieser Hierarchie sind identisch mit solchen, die sich ergeben, wenn man für eine Boson-Fermion-Kopplungstheorie im Funktionalraum eine Energiedarstellung wählt. Eine solche Energiedarstellung ist gültig, solange die angenommenen Prozesse energetisch unter der Preonenaufbruchsreaktion liegen. Zusätzlich zu den "phänomenologischen Theorien" erwartet man auch noch Korrekturen, die aus der Zusammengesetztheit der in diese Theorien eingehenden Teilchen resultieren. Dies führt bei "höheren Energien" zu Formfaktoren für die Wechselwirkungsterme der Bindungszustände; sie wurden von Stumpf [14] abgeschätzt.

Anhang A

Der freie Propagator $F_{I_1 I_2}$ ist definiert durch

$$F_{I_1 I_2} = F_{z_1 z_2}(x_1, x_2) \tag{A.1}$$

$$= \langle 0 | T \psi_{z_1}(x_1) \psi_{z_2}(x_2) | 0 \rangle$$

wobei die $\psi_z(x)$-Felder der freien Diracgleichung genügen:

$$\mathbb{D}_{I_1 I_2} \psi_{I_2} = 0 \tag{A.2}$$

In unserem Modell ist

$$\mathbb{D}_{I_1 I_2} = \mathbb{D}_{z_1 z_2}(x_1, x_2) \tag{A.3}$$

$$= \left(\gamma^{\mu}_{z_1 z_2} (-i \partial_{\mu}(x_1)) + \mathbb{1}_{z_1 z_2} m_{z_1} \right) \delta(x_1 - x_2)$$

und

$$\gamma^{\mu}_{z_1 z_2} = \gamma^{\mu}_{\substack{i_1 i_2 \\ \Gamma_1 \Gamma_2 \\ \alpha_1 \alpha_2}} \tag{A.4}$$

$$= \gamma^{\mu}_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\Gamma_1 \Gamma_2} \delta_{i_1 i_2}$$

(vergleiche dazu die Gleichungen (1.27) - (1.33).)

Zur Ableitung der Gleichung für $F_{I_1 I_2}$ betrachten wir

$$\mathbb{D}_{I_1 I_2} F_{I_2 I_3} = \langle 0 | \mathbb{D}_{I_1 I_2} (T \psi_{I_2} \psi_{I_3}) | 0 \rangle \tag{A.5}$$

Gemäß [30] gilt (vergleiche auch (2.20)):

$$\frac{\partial}{\partial t} T\,\psi_I \psi_{I_1} \cdots \psi_{I_n} \tag{A.6}$$

$$= T\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi_I\right)\psi_{I_1}\cdots\psi_{I_n} - \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell} A_{I_\ell I}\, T\psi_{I_1}\cdots\psi_{I_{\ell-1}}\psi_{I_{\ell+1}}\cdots\psi_{I_n}$$

wobei

$$A_{I_1 I_2} = A_{i_1 i_2}(x_1, x_2) \tag{A.7}$$

$$= -\xi_{i_1}\,\delta_{i_1 i_2}\,\sigma^{1}_{\Gamma_1\Gamma_2}\,(C\gamma^0)_{\alpha_1\alpha_2}\,\delta(\vec{x}_1-\vec{x}_2)$$

(vergleiche (1.27)).

Berücksichtigt man (A.2), so ergibt (A.5):

$$\mathbb{D}_{I_1 I_2}\, F_{I_2 I_3} = -i\, G^0_{I_1 I_2}\, A_{I_2 I_3} \tag{A.8}$$

$$\int dx_2\, \mathbb{D}^{\;i_1 i_2}_{\Gamma_1\Gamma_2\;\alpha_1\alpha_2}(x_1,x_2)\, F^{\;i_2 i_3}_{\Gamma_2\Gamma_3\;\alpha_2\alpha_3}(x_2,x_3) = -i\,\xi_{i_1}\,\delta_{i_1 i_3}\,\sigma^{1}_{\Gamma_1\Gamma_3}\,C_{\alpha_1\alpha_3}\,\delta(x_1-x_3)$$

Aufgrund der gleichzeitigen Vertauschungsrelationen, die auch für die freien Feldoperatoren gelten, ist $F_{I_2 I_3}$ antidiagonal in den Superspinindizes (Γ_2,Γ_3) [35] . Außerdem ergibt sich wegen (A.7), daß $F_{I_2 I_3}$ von den Hilfsfeldern nur als Index abhängt:

$$F_{I_2 I_3} = F^{\;i_2 i_3}_{\Gamma_2\Gamma_3\;\alpha_2\alpha_3}(x_2-x_3) = F^{\;i_2}_{\Gamma_2\Gamma_3\;\alpha_2\alpha_3}(x_2-x_3)\,\delta_{i_2 i_3} \tag{A.9}$$

Wegen der Definition des T-Produkts ist $F_{I_2 I_3}$ antisymmetrisch.

$$F_{I_2 I_3} = - F_{I_3 I_2} \tag{A.10}$$

Ebenso wie die τ-Funktionen ist auch F für gleiche Zeiten $t_2 = t_3$ nicht definiert. Wir legen den Funktionswert von $F|_{t_2=t_3}$ dadurch fest, daß wir Antisymmetrie bei Vertauschen der restlichen Indizes fordern (vergl. (A.22)).

F hängt mit dem freien Propagator S^c der Diracgleichung zusammen durch

$$S^{c\,i}_{\substack{12 \\ \alpha_1\alpha_2}}(x_1 - x_2) = (i\xi_i)^{-1} \, F^{\,i}_{\substack{12 \\ \alpha_1\beta}}(x_1 - x_2) \, C_{\beta\alpha_2} \tag{A.11}$$

$$S^{c\,i}_{\substack{21 \\ \alpha_1\alpha_2}}(x_1 - x_2) = (i\xi_i)^{-1} \, F^{\,i}_{\substack{21 \\ \alpha_1\beta}}(x_1 - x_2) \, C_{\beta\alpha_2} \tag{A.12}$$

Die $S^{c\,i}_{\substack{\Lambda_1\Lambda_2 \\ \alpha_1\alpha_2}}(x_1 - x_2)$ berechnen sich aus dem Propagator der Klein-Gordon-Gleichung D^c:

$$S^{c\,i}_{\substack{12 \\ \alpha_1\alpha_2}}(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m_i)_{\alpha_1\alpha_2} \, D^c(x, m_i) \tag{A.13}$$

$$S^{c\,i}_{\substack{21 \\ \alpha_1\alpha_2}}(x) = (-i\gamma^{\mu T} \partial_\mu + m_i)_{\alpha_1\alpha_2} \, D^c(x, m_i) \tag{A.14}$$

Eine explizite Darstellung von $D^c(x)$ ist in [36] angegeben:

$$D^c(x, m_i) = \tfrac{1}{4\pi}\,\delta(\lambda) - \frac{m_i}{8\pi\sqrt{\lambda}} \left\{ J_1(m_i\sqrt{\lambda}) - N_1(m_i\sqrt{\lambda}) \right\}$$

$$+ \frac{i \cdot m_i}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}} \left\{ K_1(m_i\sqrt{\lambda}) \right\} \tag{A.15}$$

wobei

$$\lambda = x^2 = t^2 - r^2 \quad ; \quad r := \sqrt{\vec{x}^2} \tag{A.16}$$

und J_1, N_1, K_1 Besselfunktionen sind; vergleiche [37] .

Mit der Definition

$$F^{\pm}_{\substack{\Lambda_1\Lambda_2 \\ \alpha_1\alpha_2}}(x_1-x_2) := F^{i_1}_{\substack{\Lambda_1\Lambda_2 \\ \alpha_1\alpha_2}}(x_1-x_2) \pm F^{i_2}_{\substack{\Lambda_1\Lambda_2 \\ \alpha_1\alpha_2}}(x_1-x_2) \tag{A.17}$$

und den oben beschriebenen Eigenschaften von F^i folgt:

(A.18)

$$F^{\pm}_{\substack{\Lambda_1\Lambda_2 \\ \alpha_1\alpha_2}}(x_1-x_2) = -i\,\sigma^{-1}_{\Lambda_1\Lambda_2}\left[(\gamma^\mu C)_{\alpha_1\alpha_2}\, i\partial_\nu A^{\pm}(x_1-x_2) + C_{\alpha_1\alpha_2} B^{\pm}(x_1-x_2)\right]$$

In (A.18) haben wir folgende Abkürzungen benutzt:

$$A^{\pm}(x_1-x_2) = -\Delta m^{-1}\left(D^c(x_1-x_2,m_1) \mp D^c(x_1-x_2,m_2)\right) \tag{A.19}$$

$$B^{\pm}(x_1-x_2) = -\Delta m^{-1}\left(m_1 D^c(x_1-x_2,m_1) \mp m_2 D^c(x_1-x_2,m_2)\right) \tag{A.20}$$

$$\Delta m = m_1 - m_2 \tag{A.21}$$

$D^c(x,m)$ ist durch (A.15) gegeben.

Den Übergang zum einzeitigen Limes definieren wir durch

$$F^{\pm}_{\substack{\Lambda_1\Lambda_2 \\ \alpha_1\alpha_2}}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)$$

$$= 1/2 \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0 \\ \varepsilon_1>\varepsilon_2}} \left(F^{\pm}_{\substack{\Lambda_1\Lambda_2 \\ \alpha_1\alpha_2}}(\varepsilon_1-\varepsilon_2, \vec{x}_1-\vec{x}_2) + F^{\pm}_{\substack{\Lambda_1\Lambda_2 \\ \alpha_1\alpha_2}}(\varepsilon_2-\varepsilon_1, \vec{x}_1-\vec{x}_2)\right) \tag{A.22}$$

Wegen der Definitionen (A.15) und (A.17) - (A.20) sowie mit (A.22) folgt

$$\underset{\substack{\Lambda_1\Lambda_2\\ \alpha_1\alpha_2}}{F^{\pm}}(\vec{x}) = -i\,\sigma^{-1}_{\Lambda_1\Lambda_2}\left[\left(\gamma^m C\right)_{\alpha_1\alpha_2} i\partial_m A^{\pm}(\vec{x}) + C_{\alpha_1\alpha_2} B^{\pm}(\vec{x})\right] \tag{A.23}$$

$$A^{\pm}(\vec{x}) = -\Delta m^{-1}\left(D^c(\vec{x},m_1) \mp D^c(\vec{x},m_2)\right) \tag{A.24}$$

$$B^{\pm}(\vec{x}) = -\Delta m^{-1}\left(m_1 D^c(\vec{x},m_1) \mp m_2 D^c(\vec{x},m_2)\right) \tag{A.25}$$

$$D^c(\vec{x},m) = (4\pi)^{-1}\,\delta(r^2) + \frac{im}{4\pi^2 r}\,K_1(mr) \tag{A.26}$$

$$r = \sqrt{\vec{x}^2}$$

Wir benutzen auch noch folgende Abkürzung:

$$\underset{\alpha_1\alpha_2}{F^{\pm}}(\vec{x}) := -i\left[\left(\gamma^m C\right)_{\alpha_1\alpha_2} i\partial_m A^{\pm}(\vec{x}) + C_{\alpha_1\alpha_2} B^{\pm}(\vec{x})\right] \tag{A.27}$$

Die Fouriertransformierte $F^{\pm}(\vec{q})$ ist gegeben durch

$$\underset{\substack{\Lambda_1\Lambda_2\\ \alpha_1\alpha_2}}{F^{\pm}}(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3q\ \underset{\substack{\Lambda_1\Lambda_2\\ \alpha_1\alpha_2}}{\tilde{F}^{\pm}}(\vec{q})\ e^{+i\vec{q}\vec{x}} \tag{A.28}$$

Bildet man die Fouriertransformierte der Größen (A.24) - (A.26) und beachtet, daß wegen (A.26) gilt:

$$D^c(\vec{p},m) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3x\ D^c(\vec{x},m)\,e^{-i\vec{p}\vec{x}}$$

$$= (2\pi)^{-3/2}\cdot i/2\cdot\left(m^2+p^2\right)^{-1/2} \tag{A.29}$$

wobei

$$p^2 := \vec{p}^{\,2} \ ,$$

so folgt für $F^{\pm}(\vec{q})$ aus (A.28):

$$F^{\pm}_{\substack{\Lambda_1\Lambda_2 \\ \alpha_1\alpha_2}}(\vec{q}) = -\sigma^{-1}_{\Lambda_1\Lambda_2}\left[(\gamma^m C)_{\alpha_1\alpha_2} q_m \tilde{A}^{\pm}(\vec{q}) + C_{\alpha_1\alpha_2}\tilde{B}^{\pm}(\vec{q})\right] \tag{A.30}$$

$$\tilde{A}^{\pm}(\vec{q}) = (2\Delta m)^{-1}\left[(m_1^2+q^2)^{-1/2} \mp (m_2^2+q^2)^{-1/2}\right] \tag{A.31}$$

$$\tilde{B}^{\pm}(\vec{q}) = (2\Delta m)^{-1}\left[m_1(m_1^2+q^2)^{-1/2} \mp m_2(m_2^2+q^2)^{-1/2}\right] \tag{A.32}$$

und analog für (A.27)

$$F^{\pm}_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{q}) = -\left[(\gamma^m C)_{\alpha_1\alpha_2} q_m \tilde{A}^{\pm}(\vec{q}) + C_{\alpha_1\alpha_2}\tilde{B}^{\pm}(\vec{q})\right] \tag{A.33}$$

Anhang B

1. Bezeichnungen

Wir verwenden das natürliche Einheitssystem mit

$$\hbar = c = 1 \tag{B.1}$$

Alle Dimensionsangaben sind auf die Masse bezogen. Ein Raum-Zeit-Punkt des Minkowskiraums hat die kontravarianten Koordinaten

$$x^\mu = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}) \tag{B.2}$$

Der metrische Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ ist gegeben durch

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1 \tag{B.3}$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \mu \neq \nu$$

Kovariante Koordinaten eines Raum-Zeit-Punktes sind durch $g_{\mu\nu}$ festgelegt:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{B.4}$$

also

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -\vec{x})$$

wobei wir die Einsteinkonvention benutzen, d.h. über doppelt vorkommende Indizes soll summiert werden.

Weiter gilt

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad ; \quad g_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu := \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \tag{B.5}$$

Den Kommutator zweier Operatoren O_1, O_2 bezeichnen wir mit

$$[O_1, O_2] = O_1 O_2 - O_2 O_1 \tag{B.6}$$

den Antikommutator mit

$$\{O_1, O_2\} = O_1 O_2 + O_2 O_1 \tag{B.7}$$

2. Diracspinoren

Die Diracmatrizen werden durch

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1} \tag{B.8}$$

definiert. Wir wählen die Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{B.9}$$

mit den Paulimatrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B.10}$$

sowie

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma^0$$

Die Diracgleichung für den vierkomponentigen Spinor $\psi(x) = \psi_\alpha(x)$, α=1,2,3,4, ist

$$(-i \gamma^\mu \partial_\mu + m)\, \psi(x) = 0 \tag{B.11}$$

Die adjungierte Diracgleichung ergibt sich daraus:

$$(+i \gamma^{\mu T} \partial_\mu + m)\, \bar{\psi}^T(x) = 0 \tag{B.12}$$

mit

$$\bar{\psi}_\alpha(x) \quad = \quad \psi^+_\beta(x)\,\gamma^0_{\beta\alpha}$$

Es existiert nun eine Matrix C, welche die Gleichung

$$-\gamma^{\mu\,T} \quad = \quad C^{-1}\gamma^\mu C \tag{B.13}$$

erfüllt, wobei für C in der Darstellung (B.9) der Diracmatrizen gilt

$$C \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \tag{B.14}$$

wobei

$$\varepsilon \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad -i\sigma^2$$

Definieren wir den ladungskonjugierten Spinor $\psi^C(x)$ durch

$$\psi^c(x) \quad = \quad C\bar{\psi}^T(x) \tag{B.15}$$

so erfüllt dieser dieselbe Gleichung wie $\psi(x)$, nämlich

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\,\psi^c(x) \quad = \quad 0 \tag{B.16}$$

Jede Komponente der Diracgleichung (B.11) erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung

$$(+i\not{\partial}+m)_{\alpha\beta}\,(-i\not{\partial}+m)_{\beta\delta}\,\psi_\delta(x) \quad = \quad (\Box^2+m^2)\,\psi_\alpha(x) = 0 \tag{B.17}$$

Definieren wir die Fouriertransformation durch

$$\psi_\alpha(x) \quad = \quad (2\pi)^{-2}\int d^4p\; e^{-ipx}\,\psi_\alpha(p) \tag{B.18}$$

$$\psi_\alpha(p) \quad = \quad (2\pi)^{-2}\int d^4x\; e^{+ipx}\,\psi_\alpha(x) \tag{B.19}$$

dann folgt

$$\delta(p-q) = (2\pi)^{-4} \int d^4x \; e^{ix(p-q)} \tag{B.20}$$

Wegen (B.17) gilt für die Felder $\psi_\alpha(x)$:

$$\psi_\alpha(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^4x \; e^{-ipx} \, \delta(p^2-m^2) \, \psi_\alpha(p) \tag{B.21}$$

Zerlegt man die δ-Funktion nach

$$\delta(p^2-m^2) = (2|p^0|)^{-1} \left(\delta(p^0+E_p) + \delta(p^0-E_p) \right) \tag{B.22}$$

wobei

$$E_p := +\left(m^2+\vec{p}^{\,2}\right)^{1/2} > 0 \tag{B.23}$$

gilt, so erhält man für die Felder $\psi_\alpha(x)$ nach Integration über dp^0:

$$\psi_\alpha(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2E_p} \left\{ \psi(-E_p,\vec{p}) \; e^{-i(-E_p x^0 + p^i x_i)} \right.$$

$$\left. + \psi(+E_p,\vec{p}) \; e^{-i(+E_p x^0 + p^i x_i)} \right\} \tag{B.24}$$

Setzt man (B.24) in die Diracgleichung (B.11) ein, so folgt

$$\int d^3p \, (2E_p)^{-1} \left\{ \left[-(-\gamma^0 E_p + \gamma^i p_i) + m \right] \psi(-E_p,\vec{p}) \, e^{-i(-E_p x_0 + p^i x_i)} \right.$$

(B.25)

$$\left. + \left[-(+\gamma^0 E_p + \gamma^i p_i) + m \right] \psi(+E_p,\vec{p}) \, e^{-i(+E_p x_0 + p^i x_i)} \right\} = 0$$

Die Lösungen der Diracgleichung (B.11) zerfallen in solche mit positiver Energie $\psi(+Ep,\vec{p})$, und in solche mit negativer Energie $\psi(-Ep,\vec{p})$, für die

folgende Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$(+\gamma^0 E_p + \vec{\gamma}\vec{p} + m)\ \psi(-E_p, \vec{p}) = 0 \qquad \text{(B.26)}$$

$$(-\gamma^0 E_p + \vec{\gamma}\vec{p} + m)\ \psi(+E_p, \vec{p}) = 0 \qquad \text{(B.27)}$$

Um (B.26), (B.27) zu lösen, machen wir den Ansatz

$$\psi_\alpha(+E_p, \vec{p}) = \sum_{s=\pm} a(\vec{p}, s)\ u_\alpha(s, \vec{p}) \qquad \text{(B.28)}$$

$$\psi_\alpha(-E_p, \vec{p}) = \sum_{s=\pm} b(\vec{p}, s)\ v_\alpha(s, \vec{p}) \qquad \text{(B.29)}$$

Aus (B.26), (B.27) ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für die "Diracspinoren" $u_\alpha(\vec{p},s)$, $v_\alpha(\vec{p},s)$:

$$(-\gamma^0 E_p + \vec{\gamma}\vec{p} + m)\ u(\vec{p}, s) = 0 \qquad \text{(B.30)}$$

$$(+\gamma^0 E_p + \vec{\gamma}\vec{p} + m)\ v(\vec{p}, s) = 0 \qquad \text{(B.31)}$$

Setzt man in (B.30), (B.31) die Darstellung der Diracmatrizen (B.9) ein, so erhält man für die Diracspinoren folgende explizite Gestalt:

$$u_\alpha(\vec{p}, s) = N_p \begin{pmatrix} \vec{e}_s \\ \dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p + m}\,\vec{e}_s \end{pmatrix}_\alpha \qquad \text{(B.32)}$$

$$v_\alpha(\vec{p}, s) = N_p \begin{pmatrix} -\dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p + m}\,\vec{e}_s \\ \vec{e}_s \end{pmatrix}_\alpha$$

wobei die beiden Vektoren $\vec{e}_s$, s=±1/2, gegeben sind durch

$$\vec{e}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{e}_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{B.33}$$

Np in (B.32) ist ein Normierungsfaktor. In Anlehnung an Lurie[38] und Eisele[39] wählen wir

$$N_p := \left(\frac{E_p + m}{2E_p} \right)^{1/2} \tag{B.34}$$

Damit lassen sich für u und v folgende Relationen nachrechnen:

$$u_\alpha^+(\vec{p},s)\, u_\alpha(\vec{p},\sigma) = v_\alpha^+(\vec{p},s)\, v_\alpha(\vec{p},\sigma) = \delta_{\sigma s} \tag{B.35}$$

$$\bar{u}_\alpha(\vec{p},s)\, u_\alpha(\vec{p},\sigma) = m E_p^{-1}\, \delta_{\sigma s} \tag{B.36}$$

$$\bar{v}_\alpha(\vec{p},s)\, v_\alpha(\vec{p},\sigma) = -m E_p^{-1}\, \delta_{\sigma s} \tag{B.37}$$

$u_\alpha^+(\vec{p},s)$ ist mit (B.32) gegeben durch

$$u_\alpha^+(\vec{p},s) = N_p \begin{pmatrix} \vec{e}_s \\ \dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m}\, \vec{e}_s \end{pmatrix}_\alpha^+ \tag{B.38}$$

$$= N_p \left(\vec{e}_s^{\,T}, \; \vec{e}_s^{\,T} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m} \right)_\alpha$$

wenn man die Hermitizität von $\vec{\sigma}$ berücksichtigt. Analog erhält man

$$v_\alpha^+(\vec{p},s) = N_p \left(-\vec{e}_s^{\,T} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m}, \; \vec{e}_s^{\,T} \right)_\alpha \tag{B.39}$$

und

$$\bar{u}_\alpha(\vec{p},s) = u^+_\beta(\vec{p},s)\,\gamma^0_{\beta\alpha} \tag{B.40}$$

$$\bar{v}_\alpha(\vec{p},s) = v^+_\beta(\vec{p},s)\,\gamma^0_{\beta\alpha} \tag{B.41}$$

Entsprechend der Definition des ladungskonjugierten Spinors $\psi^C(x)$ in (B.15) definieren wir den ladungskonjugierten Diracspinor v^C:

$$v^c_\alpha(\vec{p},s) := C_{\alpha\beta}\left(v^+_\gamma\,\gamma^0_{\gamma\beta}\right)^T \tag{B.42}$$

Da v die Gleichung (B.31) erfüllt, ergibt sich für v^C folgende Gleichung:

$$\left(-\gamma^0 E_p - \vec{\gamma}\vec{p} + m\right) v^c(\vec{p},s) = 0 \tag{B.43}$$

Aufgrund von (B.38) sowie mit (B.9) und (B.14) gilt für v^C:

$$v^c_\alpha(\vec{p},s) = -\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}_{\alpha\beta} u^{+T}_\beta(\vec{p},s) \tag{B.44}$$

und für v^{C+} wegen $\varepsilon^+ = -\varepsilon$:

$$v^{c+}_\alpha(\vec{p},s) = u^T_\beta(\vec{p},s)\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}_{\beta\alpha} \tag{B.45}$$

Mit $\varepsilon^2 = -I_2$ lassen sich folgende Produkte berechnen:

$$v^{c+}_\alpha(\vec{p},\sigma)\,v^c_\alpha(\vec{p},s) = \left(u^+_\alpha(\vec{p},s)\,u_\alpha(\vec{p},\sigma)\right)^T = \delta_{\sigma s} \tag{B.46}$$

$$v^{c+}_\alpha(\vec{p},\sigma)\,\gamma^0_{\alpha\beta}\,v^c_\beta(\vec{p},s) = \left(\bar{u}_\alpha(\vec{p},s)\,u_\alpha(\vec{p},\sigma)\right)^T = mE_p^{-1}\delta_{\sigma s} \tag{B.47}$$

Schließlich folgt aus (B.30) beziehungsweise (B.43) durch Multiplikation mit $u^+(\vec{p},\sigma)\gamma^0$ beziehungsweise mit $v^{C+}\gamma^0$ von links und durch Ausnutzen von (B.35) beziehungsweise (B.46):

$$\delta_{\sigma s}\, E_p \;=\; u^{+}(\vec{p},\sigma)\,\gamma^{0}\,(\vec{\gamma}\vec{p}+m)\,u(\vec{p},s) \tag{B.48}$$

$$\delta_{\sigma s}\, E_p \;=\; v^{c+}(\vec{p},\sigma)\,\gamma^{0}\,(-\vec{\gamma}\vec{p}+m)\,v^{c}(\vec{p},s) \tag{B.49}$$

Dies entspricht den Gleichungen (5.10) und (5.76).

Mit Hilfe der Gleichung

$$(\vec{\sigma}\vec{p})(\vec{\sigma}\vec{k}) \;=\; (\vec{p}\vec{k})\,\sigma^{0} \;+\; i\,\vec{\sigma}\,(\vec{p}\times\vec{k}) \tag{B.50}$$

lassen sich die Formeln (5.32) und (5.33) berechnen:

$$\mathcal{U}^{2}_{\sigma s}(\vec{k},\vec{p}) \;=\; \bar{u}(\sigma,\vec{k})\,u(s,\vec{p}) \tag{B.51}$$

$$= N_p N_k \left[\left(1-\frac{\vec{k}\vec{p}}{(E_p+m)(E_k+m)}\right)\delta_{\sigma s} - \frac{i\,\vec{\sigma}_{\sigma s}(\vec{k}\times\vec{p})}{(E_p+m)(E_k+m)}\right]$$

$$\mathcal{U}^{\pm}_{\sigma s}(\vec{k},\vec{p}) \;=\; u_\beta(s,\vec{p})\,C_{\beta\alpha'}\,\mathcal{F}^{\pm}_{\alpha'\alpha}(-\vec{k})\,u^{+}_{\alpha}(\sigma,\vec{k}) \tag{B.52}$$

$$= u^{+}_{\alpha}(\sigma,\vec{k})\,\mathcal{F}^{\pm\,T}_{\alpha\alpha'}(-\vec{k})\,C^{T}_{\alpha'\beta}\,u_\beta(s,\vec{p})$$

$$= u^{+}(\sigma,\vec{k})\left[\gamma^{m}k_m\,\tilde{A}^{\pm}(-\vec{k}) + I_4\,\tilde{B}^{\pm}(-\vec{k})\right]u(s,\vec{p})$$

$$= N_p N_k \left[\left(\frac{\vec{k}^{2}}{E_k+m}-\frac{\vec{k}\vec{p}}{E_p+m}\right)\delta_{\sigma s}\,\tilde{A}^{\pm}(-\vec{k}) - \frac{i\,\vec{\sigma}_{\sigma s}(\vec{k}\times\vec{p})}{E_p+m}\,\tilde{A}^{\pm}(-\vec{k})\right.$$

$$\left. + \left(1+\frac{\vec{k}\vec{p}}{(E_p+m)(E_k+m)}\right)\delta_{\sigma s}\,\tilde{B}^{\pm}(-\vec{k}) + \frac{i\,\vec{\sigma}_{\sigma s}(\vec{k}\times\vec{p})}{(E_p+m)(E_k+m)}\,\tilde{B}^{\pm}(-\vec{k})\right]$$

In Kapitel 5 benutzen wir Ausdrücke für den Niederenergielimes von $\mathcal{U}^2$ und $\mathcal{U}^{\pm}$. Diese Ausdrücke ergeben sich aus folgenden Oberlegungen:

Mit

$$E_{k_i} = (M^2 + \vec{k}_i^{\,2})^{1/2} \quad , \quad i = 1,2,3$$

folgt nach Transformation auf Jacobikoordinaten (vergl. (5.57)):

$$\lim_{\hat{k}_3 \to 0} E_{k_i}^{-1} = M^{-1} - 1/2 \; \hat{k}_3^2 \cdot M^{-3} \tag{B.53}$$

Aus (B.34) folgt

$$\lim_{\hat{k}_3 \to 0} N_{k_i} = \lim_{\hat{k}_3 \to 0} N_{q_i} = 1 \tag{B.54}$$

wobei

$$\vec{q}_{1,2} = \pm 2^{-1/2} \hat{p}_1 + 6^{-1/2} \hat{k}_2 + 3^{-1/2} \hat{k}_3$$

Die Näherungen (B.53), (B.54) ergeben sich, da alle $\hat{p}_i$ und $\hat{k}_i$, i=1,2, gegenüber der Masse M vernachlässigbar sind und weil nach (5.55) gilt:

$$M \gg |\hat{k}_i| \quad , \quad M \gg |\hat{p}_i| \quad , \quad i = 1,2 \tag{B.55}$$

Für $\mathcal{U}^2$ folgt damit wegen (B.33) und (B.37)

$$\lim_{\hat{k}_3 \to 0} \mathcal{U}^2_{\sigma s}(\vec{k}_i, \vec{q}_i) = \delta_{\sigma s} \tag{B.56}$$

Um $\mathcal{U}^{\pm}$ zu berechnen, benötigen wir zuerst das Verhalten von $\tilde{A}^{\pm}$, $\tilde{B}^{\pm}$. Aus (A.31) und (A.32) folgt

$$\lim_{\hat{k}_3 \to 0} \tilde{A}^{\pm}(-\vec{k}_i) = \lim_{\hat{k}_3 \to 0} (2\Delta m)^{-1} \left[\left(m_1^{-1} - 1/2 \, m_1^{-3} \hat{k}_3^2 \right) \mp \left(m_2^{-1} - 1/2 \, m_2^{-3} \hat{k}_3^2 \right) \right]$$

$$\lim_{\hat{k}_3 \to 0} \tilde{A}^{\pm}(-\vec{k}_i) = (2\Delta m)^{-1} \left(m_1^{-1} \mp m_2^{-1} \right) \pm (4\Delta m (m_2^3 \mp m_1^3))^{-1} \hat{k}_3^2 \tag{B.57}$$

$$\lim_{\hat{k}_3\to 0} \tilde{B}^{\pm}(-\vec{k}_i) = \lim_{\hat{k}_3\to 0} (2\Delta m)^{-1}\left[\left(\frac{m_1}{m_1} - \tfrac{1}{2}\frac{\hat{k}_3^2}{m_1^2}\right) \mp \left(\frac{m_2}{m_2} - \tfrac{1}{2}\frac{\hat{k}_3^2}{m_2^2}\right)\right]$$

$$\lim_{\hat{k}_3\to 0} \tilde{B}^{+}(-\vec{k}_i) = \hat{k}_3^2\,(4\Delta m\,(m_2^2 - m_1^2))^{-1} \tag{B.58}$$

$$\lim_{\hat{k}_3\to 0} \tilde{B}^{-}(-\vec{k}_i) = \Delta m^{-1} - \hat{k}_3^2\,(4\Delta m\,(m_1^2 + m_2^2))^{-1} \tag{B.59}$$

Mit (B.52) folgt schließlich für $U^{\pm}$ im Niederenergielimes

$$\lim_{\hat{k}_3\to 0} U^{+}_{\sigma s}(\vec{k}_i, \vec{q}_i) = \left[\left(\frac{\vec{k}_i^2}{2M} - \frac{\vec{k}_i\vec{q}_i}{2M}\right)\delta_{\sigma s} - \frac{i\vec{\sigma}_{\sigma s}(\vec{k}_i\times\vec{q}_i)}{2M}\right]\frac{1}{2\Delta m}\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)$$

$$+ \left[\left(1 + \frac{\vec{k}_i\vec{q}_i}{(2M)^2}\right)\delta_{\sigma s} + \frac{i\vec{\sigma}_{\sigma s}(\vec{k}_i\times\vec{q}_i)}{(2M)^2}\right]\frac{\hat{k}_3^2}{4\Delta m}\left(\frac{1}{m_2^2 - m_1^2}\right)$$

$$\lim_{\hat{k}_3\to 0} U^{+}_{\sigma s}(\vec{k}_i, \vec{q}_i) = \delta_{\sigma s}\,\hat{k}_3^2\,(4\Delta m\,(m_2^2 - m_1^2))^{-1} \tag{B.60}$$

$$\lim_{\hat{k}_3\to 0} U^{-}_{\sigma s}(\vec{k}_i, \vec{q}_i) = \delta_{\sigma s}\,\Delta m^{-1} \tag{B.61}$$

Literaturverzeichnis

[1] L. Lyons, Progress in Particle and Nuclear Physics, Vol. 10 (1983), S. 227

[2] W. Heisenberg, Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, S. Hirzel, Stuttgart 1967

[3] F. Bopp, Ann. Physik 38, 345 (1940)

[4] K. Wildermuth, Z. Naturforsch. 5a, 373 (1950)

[5] A. Pais and G.E. Uhlenbeck, Phys. Rev. 79, 145 (1950)

[6] K.L. Nagy, State Vector Space with Indefinite Metric in Quantum Field Theory, Akadêmiai Kiadô, Budapest und P. Noordhoff, Groningen 1966

[7] H. Stumpf, Physica 114A, 184 (1982)

[8] D. Grosser and T. Lauxmann, J. Phys. G: Nucl. Phys. 8, 1505 (1982)

[9a] H. Stumpf, Z. Naturforsch. 38a, 1064 (1983)

[9b] H. Stumpf, Z. Naturforsch. 38a, 1184 (1983)

[10] D. Grosser, B. Hailer, L. Hornung, T. Lauxmann and H. Stumpf, Z. Naturforsch. 38a, 1056 (1983)

[11] H. Stumpf, Z. Naturforsch. 39a, 441 (1984)

[12] H. Stumpf, Z. Naturforsch. 37a, 1295 (1982)

[13] D. Grosser, Z. Naturforsch. 38a, 1293 (1983)

[14] H. Stumpf, Z. Naturforsch. 40a, 752 (1985)

[15a] H. Stumpf, Z. Naturforsch. 40a, 14 (1985)

[15b] H. Stumpf, Z. Naturforsch. 40a, 183 (1985)

[15c] H. Stumpf, Z. Naturforsch. 40a, 294 (1985)

[16a] H. Stumpf, Ann. Physik 13, 294 (1964)

[16b] H. Stumpf, Z. Naturforsch. 24a, 188 (1969)

[16c] H. Stumpf, Funktionale Quantentheorie, in: H.P. Dürr (Hsg.), Quanten und Felder, Vieweg, Braunschweig 1971

[16d] H. Stumpf, Acta Phys. Austriaca Suppl. IX, 195 (1972)

[16e] H. Stumpf, New Representation Spaces of the Poincaré Group and Functional Quantum Theory, in: P. Kramer, M. Dal Cin (Hsg.), Groups, Systems and Many-Body Physics, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1980

[17] D. Maison und H. Stumpf, Z. Naturforsch. 21a, 1829 (1966)

[18] H. Stumpf, Z. Naturforsch. 36a, 1024 (1981)

[19] B. Hailer, Dissertation, Fakultät für Physik, Universität Tübingen 1985

[20] L. Hornung, Dissertation, Fakultät für Physik, Universität Tübingen 1986

[21] J.J. Thomson, Phil. Mag.(5) 11, 229 (1881)

[22] W. Kaufmann und M. Abraham, Phys. Zeitschr. 4, 54, 57 (1902)

[23] H.-P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder und K. Yamazaki, Z. Naturforsch. 14a, 441 (1959)

[24] H.-P. Dürr, Z. Naturforsch. 16a, 327 (1961)

[25] B. Podolski, Phys. Rev. 62, 68 (1942)

[26] D. Bailin, Weak Interactions, Sussex University Press 1977

[27] H. Stumpf, K. Scheerer und H.G. Märtl, Z. Naturforsch. 25a, 1556 (1970)

[28] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37, 452 (1951)

[29] H. Stumpf, Z. Naturforsch. 30a, 708 (1975)

[30] H. Stumpf, Z. Naturforsch. 25a, 575 (1970)

[31] J.D. Louck und L.C. Biedenharn, in: Lecture Notes in Chemistry 12, S. 148

[32] P. Kramer, Symmetrische Gruppe und Anwendungen, in: Herbstschule über das Wenig-Nukleonen-Problem, Schleching 1971

[33] P. Kramer und M. Dal Cin (Hrg.), Groups, Systems and Many-Body Physics, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1980

[34] H. Stumpf, in Vorbereitung für Z. Naturforsch. 41a

[35] P. Roman, Introduction to Quantum Field Theory, S. 115, John Wiley 1969

[36] N.N. Bogoliubov und D.V. Sirkov, Introduction to the Theory of Quantized Fields, S. 150, Interscience Publishers LTD. 1959

[37] I.S. Gradshteyn und I.M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products, Academic Press 1965

[38] D. Lurié, Particles and Fields, John Wiley 1968

[39] J.A. Eisele, Modern Quantum Mechanics with Applications to Elementary Particle Physics, John Wiley 1969

[40] P. Kramer, private Mitteilung

DANKSAGUNG

Mein herzlichster Dank gebührt vor allem Herrn Prof. Dr. Harald Stumpf. Seine Begeisterung für das Thema, das er mir überließ, war mir steter Ansporn. In kritischen Phasen gab mir sein Ideenreichtum neue Motivation für die Arbeit; viele anregende Diskussionen mit ihm begleiteten sie und waren ihr sehr förderlich.

Besonders danken möchte ich Herrn Dr. habil. Dieter Großer, der mir den Einstieg in das Gebiet der Hochenergiephysik in vielen Diskussionen und durch Ratschläge erleichterte; er nahm auch sonst zu meinen Überlegungen und Ideen im Verlauf der Arbeit gerne kritisch Stellung.

Für Gespräche mit Herrn Prof. Dr. Peter Kramer über gruppentheoretische Aspekte dieser Arbeit bin ich ebenfalls sehr dankbar.

Dank sage ich auch den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Stumpf, meiner lieben Mitdoktorandin Frau Dipl.-Phys. Liebetraud Hornung und Herrn Dr. Bernhard Hailer.

Frau Regine Adler verhalf der Arbeit durch sorgfältiges Schreiben zu ihrer vorliegenden Gestalt. Ich bin auch ihr Dank schuldig.

In meinen Dank beziehe ich die Deutsche Forschungsgemeinschaft ein, die mich eineinhalb Jahre lang finanziell unterstützte.

LEBENSLAUF

02.05.1953	Geburt in Tübingen Eltern: Walter Lauxmann, Wirtschaftsprüfer und Steuerberater, Margarete Lauxmann, geb. Schmauz
1960 - 1964	Besuch der Dorfackerschule in Tübingen-Lustnau
1964 - 1972	Besuch des Kepler-Gymnasiums in Tübingen
14.06.1972	Reifeprüfung am Kepler-Gymnasium in Tübingen
WS 1972/73	Beginn des Studiums der Physik an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
1973 - 1974	Grundwehrdienst
SS 1974	Fortsetzung des Studiums der Physik an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
04.02.1976	Diplom-Vorprüfung in Physik
1978 - 1979	Anfertigung der Diplomarbeit "Vergleich des Zweikörperproblems der Elektrodynamik und der Gravitationstheorie" unter Anleitung von Prof. Dr. H. Pfister, Tübingen
17.09.1980	Diplomprüfung in Physik
1981 - 1986	Anfertigung der Dissertation "Fermionen als Dreipreonenbindungszustände in einheitlichen nichtlinearen Spinorfeldtheorien" unter Anleitung von Prof. Dr. H. Stumpf am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen
1979 - 1986	Zeitweilig wissenschaftliche Hilfskraft; zeitweilig Förderung durch die DFG; zeitweilig wissenschaftlicher Assistent, je am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen

Akademische Lehrer:

Baumann, Dähn, Dittrich, Elwert, Fäßler, Gönnenwein, Großer, Güttinger, Hübener, John, Kaul, Klink, Kramer, Krüger, Lenz, Lutz, Mack, Mertens, Mitter, Möllenstedt, Mühleisen, Pfister, Prandl, Rieckers, Schwenk, Sohr, Speidel, Staudt, Stumpf, Wahl, Wildermuth

Offsetdruck Spengler
Lessingstraße 4 · 7401 Neustetten 1
Telefon (0 74 72) 2 21 45